

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE . BAND 27 . HEFT 7 . DEZEMBER 1936

Zur magnetischen Anisotropie von Einkristallen aus Eisen und Nickel

Von H. Schlechtweg

(Mit 16 Figuren)

Das Problem der magnetischen Anisotropie von Einkristallen ist in den letzten Jahren mehrfach behandelt worden. Neben einer Zusammenfassung des bis zum Jahre 1932 vorliegenden Materials von R. Becker¹⁾ sind die Arbeiten von R. Gans zu erwähnen, die der theoretischen Deutung der von dem japanischen Forscherkreis²⁾ durchgeführten Versuche und der Beobachtungen von W. L. Webster³⁾ und Sucksmith, Potter und Broadway⁴⁾ gewidmet sind.

Die genannten Überlegungen beziehen sich, ebenso wie die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten, auf diejenigen Vorgänge, die bei hohen Feldern sich abspielen. Diese Vorgänge können dadurch beschrieben werden, daß man sich zu jedem Volumenelement einen Magnetisierungsvektor J , dessen Betrag gleich der Sättigungsmagnetisierung J_∞ ist, zugeordnet denkt, der dann durch ein Feld von mehr oder weniger hohem Betrage gedreht werden kann. In dem Grenzfall unendlich großen Feldes liegt J in der Richtung des Feldvektors H ; mit abnehmendem Feld hat man im Rahmen dieser Betrachtungsweise sich vorzustellen, daß der Vektor J sich allmählich aus der Feldrichtung herausdreht in Richtung auf die nächstliegende Kristallachse leichtester Magnetisierbarkeit, in der er ohne Feld liegen würde. Daß jedoch der genannte Mechanismus nicht mehr als rationelle Beschreibungsart verwendet werden kann bei sehr kleinen Feldern, ist daraus zu ersehen, daß der Magnetisierungsvorgang dann in Form eines Barkhauseneffektes stattfindet, d. h. in Wandverschiebungen der homogen bis zur Sättigung magnetisierten Bezirke⁵⁾. Aus diesem Grunde ist ein Versagen der auf Drehungen des Magnetisierungsvektor beruhenden Beschreibungsweise

1) R. Becker, Phys. Ztschr. **33**. S. 905. 1932.

2) K. Honda u. S. Kaya, Sc. Rep. Tohoku Univ. **15**. S. 721. 1926; K. Honda, H. Masumoto u. S. Kaya **17**. S. 111. 1928; S. Kaya **17**. S. 639. 1928.

3) W. L. Webster, Proc. Roy. Soc. (A) **107**. S. 504. 1925.

4) W. Sucksmith, H. H. Potter u. L. Broadway, Proc. Roy. Soc. (A) **117**. S. 476. 1928.

5) R. Becker, a. a. O.

zu erwarten, wenn das Feld in der Größenordnung der Koerzitivkraft liegt.

Von den oben erwähnten Arbeiten der Gansschen Schule ist in diesem Zusammenhang besonders hinzuweisen auf die beiden Arbeiten von R. Gans und Czerlinsky¹⁾; in ihnen erfolgt für Nickel, wo die Raumdiagonale Richtung leichtester Magnetisierbarkeit ist, die Behandlung der Magnetisierungskurve, d. h. die Berechnung der Parallelkomponente von J in Richtung von H für Würfelkante und Flächendiagonale, sowie die Behandlung der Normalkomponente von J in Würfel- und Dodekaederebene; beim Eisen, wo die Würfelkante die Richtung leichtester Magnetisierbarkeit ist, wird die Magnetisierungskurve in der Flächen- und Raumdiagonalen betrachtet, sowie die Normalkomponente von J in Würfel- und Dodekaederebene. Es sind also hiermit experimentell und theoretisch die einfachsten Fälle untersucht. In der Praxis erweist sich jedoch die Beherrschung dieser einfachen Fälle nicht als ausreichend. Andererseits genügt es, sich ebenfalls auf so hohe Felder zu beschränken, in denen der oben skizzierte Beschreibungsmechanismus zu Recht besteht.

Die den folgenden Ausführungen zugrunde liegenden Versuche wurden an *kreisrunden Scheiben* ausgeführt, die an einem Torsionsdraht mit ihrer Ebene parallel zur Feldrichtung aufgehängt waren; das von einem Elektromagneten erzeugte Magnetfeld selbst war um die Ebenennormale, d. h. die Richtung des Torsionsdrahtes, drehbar²⁾. Ist \mathfrak{H}_a der Vektor des Außenfeldes, so gilt allgemein, daß bei Nichtparallelität von \mathfrak{H}_a und J ein Drehmoment entsteht, das gegeben wird durch

$$\mathfrak{D} = \int dV [\mathfrak{H}_a J]$$

wo $[\mathfrak{H}_a J]$ das vektorielle Produkt beider Vektoren bedeutet und über das Volumen der Scheibe zu integrieren ist. Bei der genannten Versuchsanordnung, bei der als Drehachse die Scheibennormale n festgelegt ist, kann nur die Komponente D des Drehmomentes in Richtung von n zur Auswirkung kommen; es ist dann bei homogener Magnetisierung und homogenem Außenfeld \mathfrak{H}_a :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \int (n [\mathfrak{H}_a J]) dV = \int (J [n \mathfrak{H}_a]) dV \\ &= \int |[n \mathfrak{H}_a]| \cdot J_n dV = H_a \int J_n dV \end{aligned} \right.$$

wobei J_n die Normalkomponente von J in der Scheibenebene bedeutet.

1) R. Gans u. E. Czerlinsky, *Schrift. d. Königsberger Gel. Ges. Nat. Kl.* 9. S. 1. 1932; *Ann. d. Phys.* [5] 16. S. 625. 1933. Zusammenfassung bei R. Gans, *Leipziger Vorträge* 1933, 91.

2) W. L. Webster, a. a. O.

1. Allgemeine Grundlagen

In dem hier betrachteten Gebiet hoher Felder läßt sich die innere Energie eines Volumenelementes darstellen durch die Richtungskosinus α_i der Winkel, die der Magnetisierungsvektor mit den Kristallachsen bildet; sie läßt sich in erster Näherung darstellen durch die biquadratische Form

$$K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2).$$

Hierbei ist K eine Anisotropiekonstante, die bei Eisen positiv ist und etwa den Wert¹⁾ $K = 5 \cdot 10^5$ erg/cm³ hat; bei Nickel ist sie negativ entsprechend der Tatsache, daß hier das Energieminimum in den Raumdiagonalen erreicht wird, und hat etwa den Wert $K = -5 \cdot 10^4$ erg/cm³. Physikalisch kann diese Energie gedeutet werden als Wechselwirkung zwischen dem Bahnmoment und dem Kreiselmoment des Elektrons²⁾.

Es seien nun β_i die Richtungskosinus des in dem Kristall vorhandenen Feldes \mathfrak{H} ; hierbei ist zu beachten, daß im allgemeinen diese Feldstärke von dem Außenfeld \mathfrak{H}_a sich unterscheidet um ein entmagnetisierend wirkendes Zusatzfeld, das herrührt von dem in einem Aufpunkt P von der im Punkt Q vorhandenen Magnetisierung J_Q erzeugten Potential φ_P :

$$\varphi_P = \int \left(J_Q \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}} \right) dV_Q,$$

wobei r_{PQ} den Abstand der Punkte P und Q bedeutet; das entmagnetisierende Zusatzfeld hat dann den Betrag

$$\mathfrak{H}_i = -\operatorname{grad}_P \varphi_P = -\int (J_Q \operatorname{grad}_Q) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PQ}} dV_Q$$

d. h.

$$(1,1) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_a + \int dV (J \operatorname{grad}) \operatorname{grad} \frac{1}{r},$$

wobei jetzt jeweils nach den Koordinaten zu differenzieren ist, die als Integrationsvariable auftreten. Falls ein Zusammenhang von der Form $J = \kappa \mathfrak{H}$ existiert, in dem κ ein Skalar (Suszeptibilität) ist, so führt die letztere Beziehung durch Multiplikation mit κ auf eine Integralgleichung für die Verteilung von φ (Würschmidtsche Integralgleichung).

Herrscht in dem betrachteten Volumenelement die Feldstärke \mathfrak{H} , so ist seine Energie

$$(1,2) \quad U \equiv K(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2) - H J_\infty (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3).$$

1) R. Gans u. E. Czerlinsky, a. a. O.

2) F. Bloch u. G. Gentile, Ztschr. f. Phys. 70. S. 395. 1931.

Den Zusammenhang zwischen der Lage von \mathfrak{H} und der von J erhält man dann durch die Forderung, daß U als Funktion der α_i zum Minimum zu machen ist unter der Nebenbedingung

$$(1,3) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(1,4) \quad C = \frac{2K}{HJ_\infty}$$

$$(1,5) \quad A_i = \alpha_i(1 - \alpha_i^2 - 2[\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2]),$$

so lautet die Lösung

$$(1,6) \quad \frac{\beta_1 - CA_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2 - CA_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3 - CA_3}{\alpha_3} = \cos \vartheta,$$

wobei ϑ der Winkel zwischen den Vektoren J und \mathfrak{H} ist; für ihn ergibt sich unter Benutzung der Beziehungen

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i A_i = 0$$

die Darstellung

$$(1,7) \quad \cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - C^2(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)}$$

wobei

$$(1,7') \quad \left\{ \begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 &= \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 \\ &\quad - 4(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2)^2 + 3\alpha_1^2 \alpha_1^2 \alpha_3^2. \end{aligned} \right.$$

Denkt man sich Polarkoordinaten eingeführt durch

$$(1,8) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= \sin \varrho \cos \varphi, & \alpha_2 &= \sin \varrho \sin \varphi, & \alpha_3 &= \cos \varrho \\ \beta_1 &= \sin \varrho' \cos \varphi', & \beta_2 &= \sin \varrho' \sin \varphi', & \beta_3 &= \cos \varrho' \end{aligned} \right.$$

wodurch die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 = 1$ von selbst erfüllt ist, so stellt der durch formale Lösung des Minimumproblems

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$$

erhaltene Zusammenhang zwischen J und \mathfrak{H} dann das wirkliche Minimum dar, wenn

$$(1,9) \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \varphi} \right)^2 > 0,$$

und entweder

$$P \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} > 0 \quad \text{oder} \quad Q \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} > 0.$$

Es ist dann:

$$(1,10) \quad \left\{ \begin{aligned} U &\equiv \frac{K}{4} (\sin^2 2\varrho + \sin^4 \varrho \sin^2 2\varphi) - HJ_\infty \\ &\quad \cdot (\cos \varrho \cos \varrho' + \sin \varrho \sin \varrho' \cos(\varphi' - \varphi)) \end{aligned} \right.$$

und

$$(1,9') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} = K(2 \cos 4 \varrho + \sin^2 \varrho (4 \cos^2 \varrho - 1) \sin^2 2 \varphi) + H J_{\infty} \\ \quad \cdot (\cos \varrho \cos \varrho' + \sin \varrho \sin \varrho' \cos(\varphi' - \varphi)), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 2 K \sin^4 \varrho \cos 4 \varphi + H J_{\infty} \sin \varrho \sin \varrho' \cos(\varphi' - \varphi), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \varphi} = 2 K \sin^3 \varrho \cos \varrho \sin 4 \varphi - H J_{\infty} \cos \varrho \sin \varrho' \sin(\varphi' - \varphi). \end{cases}$$

Die Achsen des Kristallsystems liegen nun im allgemeinen irgendwie zur Ebene der zu untersuchenden Einkristallscheiben orientiert; die Normale der Scheibe ist dann durch zwei Winkel ϱ_n und φ_n gegeben. Da bei der oben kurz beschriebenen Anordnung das Außenfeld \mathfrak{H}_a in der Scheibenebene liegt, so kann die Lage von \mathfrak{H}_a beim Experimentieren leicht durch einen in der Blechebene gezählten Winkel σ gekennzeichnet werden, der von der Projektion einer der Würfelkanten in die Blechebene ausgerechnet werden kann; er werde hierzu diejenige Würfelkante ausgewählt, von der aus der Winkel ϱ gezählt wird; es bestimmen dann diese Würfelkante, ihre Projektion in die Blechebene und \mathfrak{H}_a ein rechtwinklig sphärisches Dreieck, aus dem man hat:

$$(1,8a) \quad \cos \varrho_a = \cos \sigma \sin \varrho_n$$

(ϱ_a und φ_a sind die Koordinaten von \mathfrak{H}_a ; ϱ_n und φ_n die von n).

Aus der Orthogonalität des Feldes und der Blechnormalen folgt:

$$\cos \varrho_a \cos \varrho_n + \sin \varrho_a \sin \varrho_n \cos(\varphi_a - \varphi_n) = 0;$$

d. h.

$$(1,8b) \quad \cos(\varphi_a - \varphi_n) = -\cotg \varrho_n \cotg \varrho_a.$$

Streng genommen handelt es sich um die Aufgabe, zu jedem Winkel σ die zugehörige Verteilung der Magnetisierung in der Scheibe zu berechnen und daraus nach (1) die Größe des Drehmomentes. Prinzipiell gesehen, könnte man sich hierzu den folgenden Lösungsweg denken. Aus den Gleichgewichtsbedingungen $\frac{\partial U}{\partial \varrho} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ folgen nach (1,6) und (1,7) die zwei Gleichungen:

$$\cos \varrho' = \cos \vartheta \cos \varrho + C A_3; \quad \sin(\varphi' - \varphi) = \frac{C}{4} \frac{\sin^3 \varrho}{\sin \varrho'} \sin 4 \varphi$$

oder symbolisch:

$$\varrho' = P(\varrho, \varphi); \quad \varphi' = \Phi(\varrho, \varphi).$$

Schreibt man eine Komponente der Beziehung (1,1) symbolisch in der Form

$$g(\varrho', \varphi'; \varrho_n, \varphi_n; \int \varrho, \int \varphi) = 0,$$

so führt diese auf

$$G(\varrho_a, \varphi_a; \int \varrho, \int \varphi) = 0$$

und mit (1,8a, b) auf

$$G^*(\sigma; \int \varrho, \int \varphi) = 0,$$

wo das Symbol $\int \varrho$ andeuten soll, daß ϱ in dieser Gleichung auch unter einem Integral vorkommt. Wegen $(n\mathfrak{H}_a) = 0$ hat man aus (1,1) auch noch eine Beziehung:

$$r(\varrho', \varphi'; \int \varrho, \int \varphi) = 0$$

oder

$$R(\int \varrho, \int \varphi) = 0.$$

Die beiden Beziehungen $G^* = 0$, $R = 0$ sind zwei Integralgleichungen für die zu jedem Drehwinkel σ gehörige Magnetisierungsverteilung in der Scheibe. Man sieht hieraus, daß das *Problem des Entmagnetisierungsfaktors und das der Theorie der Magnetisierungskurve ein Ganzes bildet* und, streng genommen, nicht wie üblich, in zwei voneinander unabhängige Teilprobleme zerspalten werden kann.

Um das hiermit skizzierte mathematische Problem zu umgehen, sei als erste Näherung angenommen, daß die Entmagnetisierung vernachlässigbar sei, also $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_a$. Dann können als Zusammenhang zwischen dem Drehwinkel σ und den Winkeln ϱ' und φ' einfach die Beziehungen (1,8a, b) angenommen werden, in denen $\varrho_a = \varrho'$, $\varphi_a = \varphi'$ gesetzt werden. Die Magnetisierung der Scheibe wird dann als *ortsunabhängig* angenommen.

Das Ergebnis des Versuches ist nun die Abhängigkeit des Drehmomentes D von dem Winkel σ . Wir beweisen nunmehr den Satz, daß *an den Stellen σ , wo das Gleichgewicht gemäß (1,9) instabil wird, $\frac{dD}{d\sigma} = \infty$ ist*. Zum Beweis bilde man:

$$\frac{dD}{d\sigma} = \frac{\partial D}{\partial \varrho'} \frac{d\varrho'}{d\sigma} + \frac{\partial D}{\partial \varphi'} \frac{d\varphi'}{d\sigma}.$$

Bezeichnet man nun mit $\delta D / \delta \varrho'$ eine Differentiation von D nach ϱ' nur an den Stellen seiner Darstellung, wo ϱ' explizit auftritt, so hat man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial \varrho'} &= \frac{\delta D}{\delta \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varrho'} + \frac{\delta D}{\delta \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho'} + \frac{\delta D}{\delta \varrho'}, \\ \frac{\partial D}{\partial \varphi'} &= \frac{\delta D}{\delta \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi'} + \frac{\delta D}{\delta \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} + \frac{\delta D}{\delta \varphi'}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

wobei natürlich gemeint ist:

$$\frac{\partial U}{\partial \varrho} \equiv \frac{\partial U}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} \equiv \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

folgt durch partielle Differentiation nach ϱ' :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \varrho'} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial \varrho'} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho'} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varrho'} = 0, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varrho'} &\equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial \varrho'} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho'} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \varphi'} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man unmittelbar, daß dann, wenn

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \varphi} \right)^2 \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi'^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho \partial \varphi} \right)^2 = 0$$

wird, die Ableitungen $\partial \varrho / \partial \varrho'$ und $\partial \varphi / \partial \varrho'$ unendlich groß werden; durch partielle Ableitungen der Gleichgewichtsbedingungen nach φ' beweist man dasselbe für $\partial \varrho / \partial \varphi'$ und $\partial \varphi / \partial \varphi'$; also wachsen in dem Fall $\Delta = 0$ auch $\partial D / \partial \varrho'$ und $\partial D / \partial \varphi'$ über alle Grenzen, womit zugleich die über $dD/d\sigma$ behauptete Aussage bewiesen ist. — Wohlgermerkt ist bei dem letzteren Beweis keineswegs von der Darstellung (1,2) bzw. (1,10) der Kristallenergie Gebrauch gemacht; es ist nur vorausgesetzt, daß die Kristallenergie eine zweimal differenzierbare Funktion ist.

2. Das Drehmoment von Einkristallscheiben bei endlichem Feld

Führt man Polarkoordinaten ein, gemäß (8), so erhält man für eine Scheibe, deren Würfelebene des Kristallgitters in der Scheibenebene liegt, aus (1,10) und den Gleichgewichtsbedingungen $\frac{\partial U}{\partial \varrho} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ wegen $\varphi' = 0$ und damit $\varphi = 0$ sowie $\varrho' = \sigma$ und $n_1 = n_3 = 0$, $n_2 = 1$ die bekannte Parameterdarstellung:

$$(2,1) \quad \begin{cases} \frac{2D}{VK} = \sin 4\varrho, \\ \sin 4\varrho = \frac{2HJ_\infty}{K} \sin(\varrho' - \varrho), \end{cases}$$

wobei die Magnetisierung der Scheibe als homogen angenommen ist. Die Elimination von ϱ führt auf

$$4\varrho' = \arcsin \frac{2D}{VK} + 4 \arcsin \frac{D}{VHJ_\infty}$$

und unter Verwendung der Formel¹⁾

$$4 \arcsin x = \arcsin (4x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2+4x^4})$$

1) Vgl. z. B. Madelung, Die math. Hilfsmittel des Physikers. Berlin 1936, 3. Aufl., S. 54.

auf eine Darstellung von $4\varphi'$ durch einen einzigen arc sin, in dessen Argument das dimensionslos gemachte Drehmoment $\delta = \frac{D}{VK}$ und die dimensionslos gemachte Feldstärke $h = \frac{HJ_\infty}{K}$ eingehen; letztere Darstellung zeigt, daß das Drehmoment als Funktion von φ' die Periode $\pi/4$ hat für jede Größe der Feldstärke. — Aus der zweiten Formel (2,1) folgt, daß man zu jedem φ' nur dann ein φ erhält, wenn

$$(2,2) \quad h \geq 0,5$$

ist; diese Einschränkung liegt physikalisch daran, daß für sehr kleine Felder keine Drehungen des Magnetisierungsvektors vorkommen. Eine allgemeine Gültigkeit der auf Drehung des Magnetisierungsvektors gegründeten Theorie kommt demnach nur für Felder

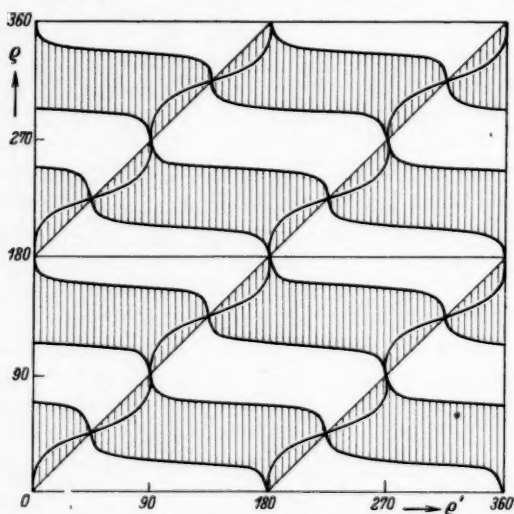


Fig. 1. Gebiete des Minimums der Energie, wenn \mathfrak{S} und J in der Würfелеbene liegen ($K > 0$)

in Frage, die der Bedingung (2,2) genügen; da andererseits zwischen dem Verhalten bei kleinen Feldern und dem bei großen Feldern ein stetiger Übergang vorhanden sein muß, so ist zu beachten, daß eventuell unmittelbar oberhalb der durch (2,2) gegebenen Grenze der Drehprozeß noch nicht in Reinkultur realisiert zu sein braucht. Die Entscheidung, ob die betreffende Lage von \mathfrak{S} und J ein wirkliches Minimum der Energie liefert, wird wegen (1,9) gegeben durch:

$$P \equiv K \left\{ 2 \cos 4 \varphi + \frac{1}{2} \sin 4 \varphi \cotg (\varphi' - \varphi) \right\} > 0$$

$$Q \equiv K \left\{ 2 \sin^4 \varphi + \frac{1}{2} \frac{\sin 4 \varphi}{\sin (\varphi' - \varphi)} \sin \varphi \sin \varphi' \right\} > 0.$$

Die Nullstellen und Pole von P und Q sind die von

$$(2,3) \quad 4 \operatorname{tg} (\varphi' - \varphi) = -\operatorname{tg} 4 \varphi \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^3 \varphi = \operatorname{tg} \varphi'.$$

In Fig. 1 sind diese Kurven angegeben und die Gebiete, die bei Eisen keinem Minimum der Energie entsprechen, schraffiert.

Fig. 2 zeigt die aus Formel (2,1) folgenden Kurven für das Drehmoment, wenn die Feldrichtung um die Scheibenachse gedreht wird. Man erkennt, daß im

Gebiet $0,5 \leq h \leq 2$ die Grenze des Gebietes, in dem U ein Minimum ist, erreicht wird und das Drehmoment der Theorie nachspringen muß¹⁾. Tatsächlich wurden solche Sprünge jedoch an einem Einkristall aus Hyperm 4, einer Sonderqualität des Krupp-schen Transformatorenbleches, nicht beobachtet, in Übereinstimmung mit den Messungen von Honda und Kaya²⁾ an Eisen. Zwar lag bei dem benutzten Einkristall nicht die Würfebene in der Blechebene, sondern die Ebene, deren Normale durch $\varphi_n = 82,5^\circ$,

$\varphi_n = 70^\circ$ gekennzeichnet ist (bestimmt durch Rückstrahlaufnahme mit weißem Röntgenlicht, in dem die Kobalt-K-Strahlung vorherrschte).

Jedoch liefert die auf Drehungen des Magnetisierungsvektors gegründete Theorie bei genügend niedrigen Feldern auch dann Sprünge; so ergibt sich für die Dodekaederebene, wo $\varphi' = 45^\circ$ ist, unter Benutzung der Formel:

$$\sin 4 \varphi = 8 \sin \varphi \cos \varphi \sin (45 + \varphi) \sin (45 - \varphi)$$

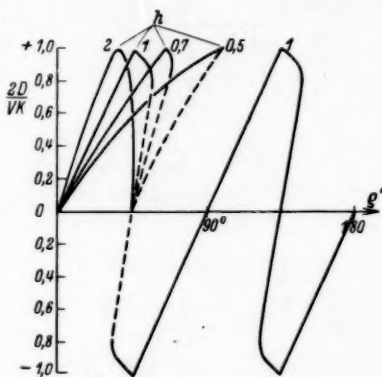


Fig. 2. Drehmoment, wenn (100) in Scheibenebene;

$$\text{Kurven } \frac{H J_\infty}{K} = h = \text{const}$$

1) Vgl. auch die von N. S. Akulow in Wiss. Ber. d. Moskauer Staatsuniversität H. 2. S. 8. 1934 gezeichneten Kurven.

2) K. Honda u. S. Kaya, a. a. O.

durch ähnliche Schlußweise wie bei dem Fall der Würfelebene, daß auch $\varphi = 45^\circ$ ist; dann erhält man:

$$\frac{D}{V} = H J_\infty \sin(\varphi' - \varphi)$$

und die bekannte Formel:

$$\frac{D}{VK} \equiv \delta = \sin 2\varphi \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right).$$

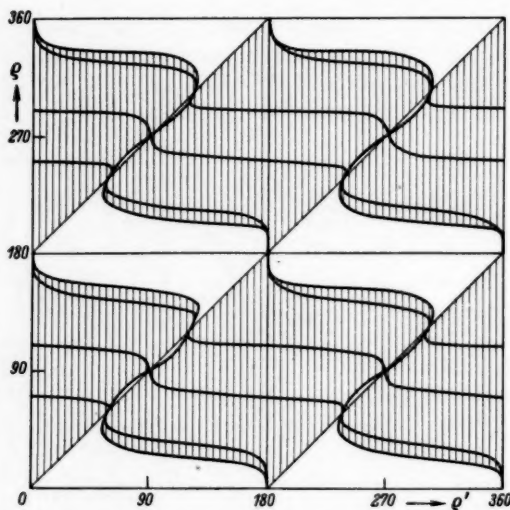


Fig. 3. Gebiete des Minimums der Energie, wenn ξ und J in der Dodekaederebene liegen ($K > 0$)

Die das stabile Gebiet in Fig. 3 abgrenzenden Kurven ergeben sich gemäß (1,9) wieder aus $P = 0$, $Q = 0$ und haben die Gleichungen:

$$(2,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cotg(\varphi' - \varphi) = - \frac{2 \cos 4\varphi + \sin^2 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1)}{\sin 2\varphi \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right)} \\ \text{bzw.} \\ \cotg \varphi' = \cotg \varphi - \frac{\sin 2\varphi \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \varphi\right)}{2 \sin^4 \varphi} \end{array} \right.$$

Fig. 4 zeigt die Veränderung des Drehmoments in Abhängigkeit von der Feldrichtung; auch hier sieht man, daß in mittleren Feldern Sprünge der Theorie nach eintreten müßten.

Aus der Nichtexistenz der Sprünge ist zu schließen, daß eine allgemeine Gültigkeit der auf der Drehung des Magnetisierungsvektors beruhenden Anschauung erst für

$$(2,5) \quad h > 2$$

in Frage kommt. Für kleinere Felder ändert sich also die Darstellung (1,2) der Kristallenergie so, daß makroskopisch das Gleichgewicht während der Drehung des Feldes in der Scheibenebene nicht labil wird¹⁾.

3. Die Magnetisierungskurve

Für Magnetisierung in einer Richtung, die der Würfel-ebene bzw. Dodekaederebene angehört, ist die Gleichung der Magnetisierungskurve bereits durch Formel (2,1) bzw.

(2,6) gegeben²⁾; die Kurven für den Fall des Eisens sind in den Figg. 5 und 6 dargestellt, in denen auch die aus den Sprungbedingungen (2,3) und (2,4) sich ergebenden Koerzitivkräfte eingetragen sind; aus der Bedingung (2,5) ist demnach nicht zu erwarten, daß die vorliegende Theorie im allgemeinen den Vorgang bereits für Felder in der Größenordnung der Koerzitivkraft und kleiner richtig darstellt.

Bei Magnetisierung in beliebiger Richtung ist die Verwendung der oben angegebenen Formel (1,7) wenig geeignet, da sie zwar leicht aus gegebener Lage von J diejenige von \mathfrak{H} zu berechnen gestattet bei bekanntem Absolutbetrag von \mathfrak{H} ; hier liegt jedoch der Fall gerade umgekehrt, daß die Lage von \mathfrak{H} bekannt ist und die von J gesucht. Zur Lösung der letzteren Aufgabe gehen wir aus von Formel (1,6); unter Benutzung der Werte der A_i führt sie auf

$$C = \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)} = \frac{\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3}{\alpha_1 \alpha_3 (\alpha_3^2 - \alpha_1^2)}$$

1) Über einen Versuch, aus der hier betrachteten Beschreibungsart die Koerzitivkraft von Dauermagneten berechnen zu wollen, vgl. W. S. Messkin u. B. E. Somin, Ztschr. f. Phys. 98. S. 610. 1936.

2) Für den speziellen Fall der Flächen- und Raumdiagonale, vgl. bereits N. S. Akulov, Ztschr. f. Phys. 67. S. 794. 1931; 69. S. 78. 1931; 81. S. 790. 1933; R. Gans u. E. Czerlinsky, a. a. O.

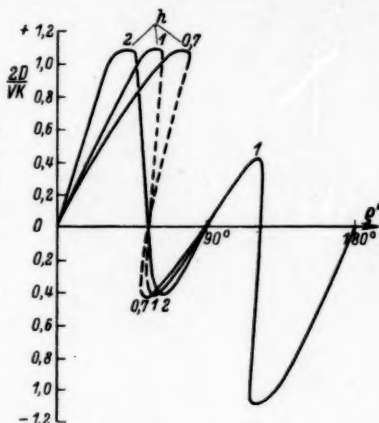


Fig. 4. Drehmoment, wenn (110) in Scheibenebene, Kurven $h = \text{const}$

oder unter Benutzung der durch (1,8) angegebenen Polarkoordinaten:

$$(3,1) \quad C = \sin \varrho' \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\sin^3 \varrho \sin \varphi \cos \varphi \cos 2\varphi} = \frac{\cos \varrho \sin \varrho' \cos \varphi' - \sin \varrho \cos \varphi \cos \varrho'}{\sin \varrho \cos \varrho \cos \varphi (\cos^2 \varrho - \sin^2 \varrho \cos^2 \varphi)},$$

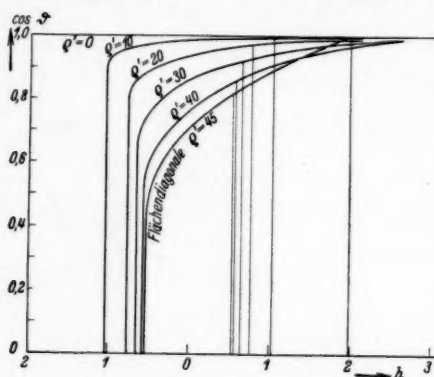


Fig. 5. Magnetisierungskurven für verschiedene Richtungen der Würfелеbene ($K > 0$)

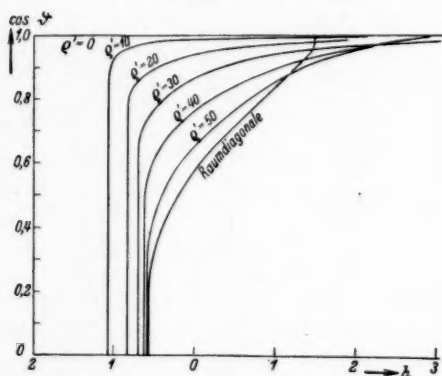


Fig. 6. Magnetisierungskurven für verschiedene Richtungen der Dodekaederebene ($K > 0$)

woraus man die von H freie Gleichung

$$4 \operatorname{tg} \varrho' \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\sin 4\varphi} = \operatorname{tg}^2 \varrho \frac{\operatorname{tg} \varrho' \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varrho \cos^2 \varphi}$$

erhält, die sich mit $y = \cotg \varrho$ umformen läßt in die bequemere Form

$$(3,2) \quad y^3 = \frac{y}{4} \left(3 + \frac{\sin(\varphi' + 3\varphi)}{\sin(\varphi' - \varphi)} \right) - \frac{\sin 4\varphi}{4 \sin(\varphi' - \varphi)} \cotg \varrho'.$$

Bei bekannter Lage (ϱ', φ') von \S läßt sich hieraus bei Annahme eines Wertes für φ der Winkel ϱ ermitteln und mit der aus (3,1) folgenden Formel

$$(3,3) \quad h = \frac{1}{2} \frac{\sin^3 \varrho \sin 4\varphi}{\sin \varrho' \sin (\varphi' - \varphi)}$$

der zugehörige Wert der Feldstärke. Da dies Verfahren sowohl bei Eisen als auch Nickel brauchbar ist, so ist bei der Lösung von (3,2) jeweils der stabile Zweig zu benutzen. Das Energieminimum liefert dabei derjenige Zweig der durch (3,2) definierten Funktion, der zu $\varphi \rightarrow \varphi'$ liefert $\varrho \rightarrow \varrho'$; hierbei geht dann $h \rightarrow \infty$. Nach Gans¹⁾ ist h nicht aus der Feldstärke selbst zu berechnen, sondern aus der Differenz zwischen \S und derjenigen Feldstärke, die zur Erzeugung desselben J nötig ist bei Magnetisierung in der Richtung leichtester Magnetisierbarkeit.

4. Das Drehmoment von Einkristallscheiben in sehr großen Feldern

Da die allgemeinen Zusammenhänge, wie an dem Beispiel der Magnetisierungskurven in dem vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, ziemlich verwickelt werden, betrachten wir die im Feld gedrehte Scheibe nur im Grenzfall sehr hohen Feldes, in denen eine Entwicklung nach negativen Potenzen des dimensionslos gemachten Feldes h angesetzt werden kann. Hier führt die Minimumforderung für den Ausdruck (1,10) auf²⁾

$$(4,1) \quad \varrho - \varrho' = \frac{A_1}{h} + \frac{A_2}{h^2} + \dots; \quad \varphi - \varphi' = \frac{B_1}{h} + \frac{B_2}{h^2} + \dots$$

Setzt man den die Kristallenergie darstellenden Anteil

$$\frac{1}{4} (\sin^2 2\varrho + \sin^4 \varrho \sin^2 2\varphi) \equiv f,$$

so ist³⁾:

$$A_1 = -f_{\varrho}; \quad A_2 = f_{\varrho} f_{\varrho\varrho} + \frac{f_{\varphi} f_{\varrho\varphi}}{\sin^2 \varrho'} - \frac{1}{2} \sin \varrho' \cos \varrho' \frac{f_{\varphi}^2}{\sin^4 \varrho'},$$

$$B_1 = -\frac{f_{\varphi}}{\sin^2 \varrho'}; \quad B_2 = \frac{1}{\sin^2 \varrho'} \left(f_{\varrho} f_{\varphi\varphi} + \frac{f_{\varphi} f_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \varrho'} - \sin \varrho' \cos \varrho' \frac{f_{\varrho} f_{\varphi}}{\sin^2 \varrho'} \right).$$

Einsetzen der Werte für die partiellen Ableitungen ergibt:

1) R. Gans u. E. Czerlinsky, a. a. O.

2) R. Gans, Ann. d. Phys. [5] 15. S. 35. 1932.

$$(4,2) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} \sin 4\varrho' - \frac{1}{2} \sin^2 \varrho' \sin 2\varrho' \sin^2 2\varphi', \\ B_1 &= -\frac{1}{2} \sin^2 \varrho' \sin 4\varphi', \\ A_2 &= -A_1 (2 \cos 4\varrho' + \sin^2 \varrho' (4 \cos^2 \varrho' - 1) \sin^2 2\varphi') \\ &\quad + \frac{7}{16} \sin^4 \varrho' \sin 2\varrho' \sin^2 4\varphi', \\ B_2 &= \frac{3}{8} \sin 2\varrho' \sin 4\varrho' \sin 4\varphi' + \frac{3}{8} \sin^2 \varrho' \sin^2 2\varrho' \sin^2 2\varphi' \sin 4\varphi' \\ &\quad + \sin^4 \varrho' \sin 4\varphi' \cos 4\varphi'. \end{aligned} \right.$$

Zur Berechnung des Drehmomentes sind gemäß (1) die Komponenten des Vektors $[\mathfrak{H}J]$ zunächst festzustellen; sie sind

$$\begin{aligned} [\mathfrak{H}J]_1 &= H J_\infty (\sin \varrho' \sin \varphi' \cos \varrho - \cos \varrho' \sin \varrho \sin \varphi), \\ [\mathfrak{H}J]_2 &= H J_\infty (\cos \varrho' \sin \varrho \cos \varphi - \sin \varrho' \cos \varphi' \cos \varrho), \\ [\mathfrak{H}J]_3 &= H J_\infty (\sin \varrho' \sin \varrho \sin (\varphi - \varphi')). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Darstellungen

$$\begin{aligned} \cos \varrho &= \cos (\varrho - \varrho') \cos \varrho' - \sin (\varrho - \varrho') \sin \varrho', \\ \sin \varrho &= \sin (\varrho - \varrho') \cos \varrho' + \cos (\varrho - \varrho') \sin \varrho' \end{aligned}$$

und der Entwicklungen

$$\begin{aligned} \sin (\varrho - \varrho') \sin (\varphi - \varphi') &= \frac{A_1 B_1}{h^2}; \quad \cos (\varrho - \varrho') \sin (\varphi - \varphi') = \frac{B_1}{h} + \frac{B_2}{h^2}, \\ \cos (\varrho - \varrho') \cos (\varphi - \varphi') &= 1 - \frac{A_1^2 + B_1^2}{2h^2}; \quad \sin (\varrho - \varrho') \cos (\varphi - \varphi') = \frac{A_1}{h} + \frac{A_2}{h^2} \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} [\mathfrak{H}J]_1 &= -A_1 \sin \varphi' - B_1 \sin \varrho' \cos \varrho' \cos \varphi' + \frac{1}{h} \\ &\cdot \left\{ -\sin \varphi' \left(A_2 - \frac{B_1^2}{2} \sin \varrho' \cos \varrho' \right) - \cos \varrho' \cos \varphi' (A_1 B_1 \cos \varrho' + B_2 \sin \varrho') \right\}, \\ \frac{1}{K} [\mathfrak{H}J]_2 &= A_1 \cos \varphi' - B_1 \sin \varrho' \cos \varrho' \sin \varphi' + \frac{1}{h} \\ &\cdot \left\{ \cos \varphi' \left(A_2 - \frac{B_1^2}{2} \sin \varrho' \cos \varrho' \right) - \cos \varrho' \sin \varphi' (A_1 B_1 \cos \varrho' + B_2 \sin \varrho') \right\}, \\ \frac{1}{K} [\mathfrak{H}J]_3 &= B_1 \sin^2 \varrho' + \frac{1}{h} \sin \varrho' (A_1 B_1 \cos \varrho' + B_2 \sin \varrho'). \end{aligned}$$

Dann wird

$$\delta \equiv \frac{D}{VK} = \frac{[\mathfrak{H}J]_1}{K} \sin \varrho_n \cos \varphi_n + \frac{[\mathfrak{H}J]_2}{K} \sin \varrho_n \sin \varphi_n + \frac{[\mathfrak{H}J]_3}{K} \cos \varrho_n$$

oder

$$(4,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= A_1 \sin \varrho_n \sin (\varphi_n - \varphi') + B_1 \cos \varrho_n \\ &\quad + \frac{1}{h} \left\{ \left(A_2 - \frac{B_1^2}{4} \sin 2\varrho' \right) \sin \varrho_n \sin (\varphi_n - \varphi') \right. \\ &\quad \left. + (A_1 B_1 \cos \varrho' + B_2 \sin \varrho') \frac{\cos \varrho_n}{\sin \varrho'} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formel (4,3) gibt zusammen mit (4,2) und (1,8a, b) die Abhängigkeit des Drehmomentes von dem Drehwinkel σ des Einkristallbleches.

Es ist ein beachtliches Ergebnis, daß selbst für unendlich großes Magnetfeld das Drehmoment einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert annimmt, der durch das von $1/h$ freie Glied der Formel (4,3) gegeben wird. In den Figg. 7, 8, 9 ist die Funktion $\lim_{h \rightarrow \infty} \delta(\sigma)$ für einige kristallographisch wichtige Ebenen, deren Miller'sche Indizes berechnet gemäß

$$\cos \varphi_n = \frac{l_3}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{l_2}{l_1}$$

jeweils angegeben sind, berechnet. Dem geometrischen Bild entnimmt man die Vermutung, daß sich an Einkristallscheiben, deren Ebene eine Würfelkante enthält, beim Herausdrehen der Feldrichtung aus der Würfelkante dieselbe Neigung der Kurve $\delta_\infty(\sigma)$ ergibt.

Diese Vermutung läßt sich in der Tat beweisen; es folgt aus (4,3)

$$\frac{d\delta_\infty}{d\sigma} = \frac{dA_1}{d\sigma} \sin \varphi_n \sin(\varphi_n - \varphi') - A_1 \sin \varphi_n \cos(\varphi_n - \varphi') \frac{d\varphi'}{d\sigma} + \frac{dB_1}{d\sigma} \cos \varphi_n$$

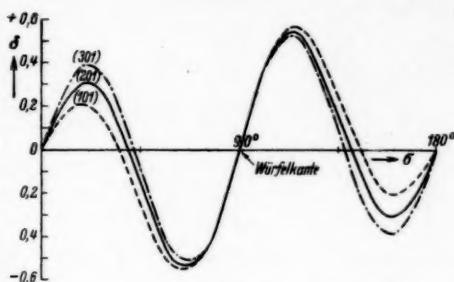


Fig. 7

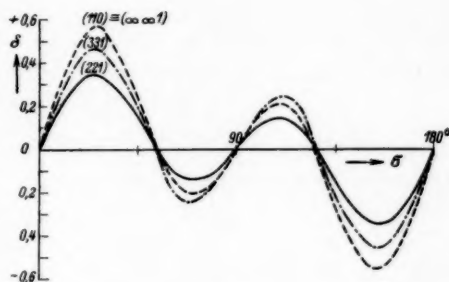


Fig. 8

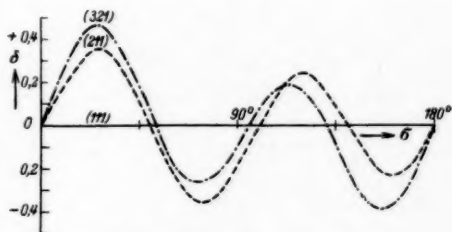


Fig. 9

Figg. 7—9. Drehmoment bei verschiedener kristallographischer Orientierung der Scheibenebene

und aus (4,2):

$$-2 \frac{dA_1}{d\sigma} = 4 \cos 4\varphi' \frac{d\varphi'}{d\sigma} + \sin^2 2\varphi' \sin^2 2\varphi' \frac{d\varphi'}{d\sigma} \\ + 2 \sin^2 \varphi' \cos 2\varphi' \sin^2 2\varphi' \frac{d\varphi'}{d\sigma} + 2 \sin^2 \varphi' \sin 2\varphi' \sin 4\varphi' \frac{d\varphi'}{d\sigma}.$$

Aus (1,8a, b) folgt

$$\frac{d\varphi'}{d\sigma} = \sin \varphi_n \frac{\sin \sigma}{\sin \varphi'}$$

und mit

$$\sin(\varphi' - \varphi_n) = \frac{\sin \sigma}{\sin \varphi'},$$

$$\frac{d\varphi'}{d\sigma} = -\frac{\cos \varphi_n}{\sin^2 \varphi'}.$$

Für Ebenen, die eine Würfelkante enthalten, ist $\varphi_n = 90^\circ$ und $\varphi' = \sigma$; für $\sigma = 0$ wird $\varphi' - \varphi_n = 180^\circ$; man erkennt dann, daß für solche Ebenen $\left. \frac{dA_1}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$ endlich ist und ebenso an der Stelle $\sigma = 0$ auch

$$-2 \frac{dB_1}{d\sigma} = \sin 2\varphi' \sin 4\varphi' \frac{d\varphi'}{d\sigma} + 4 \sin^2 \varphi' \cos 4\varphi' \frac{d\varphi'}{d\sigma}.$$

Es bleibt für die genannten Ebenen

$$\left. \frac{d\delta_\infty}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = -A_1 \frac{\cos \varphi_n}{\sin^3 \varphi'} \Big|_{\sigma=0} = \frac{2 \cos \varphi' \cos 2\varphi' \cos \varphi_n}{\sin \varphi'} \Big|_{\sigma=0}$$

oder

$$\left. \frac{d\delta_\infty}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{2 \cos \sigma \sin \varphi_n \cos \varphi_n}{\sqrt{1 - \cos^2 \sigma \sin^2 \varphi_n}} (2 \cos^2 \sigma \sin^2 \varphi_n - 1) = 2(2 - 1) = 2.$$

Hiermit ist der Betrag der Neigung der $\delta_\infty(\sigma)$ -Kurve für die in Frage stehenden Ebenen ausgerechnet und seine Unabhängigkeit von der Lage der übrigen Würfelkanten in Evidenz gesetzt.

Eine weitere, für die praktische Anwendung interessierende Größe sind die *Höchstwerte des Drehmomentes, die an Einkristallscheiben erreicht werden, in deren Ebene eine Würfelkante liegt*: mit $\varphi_n = 90^\circ$ erhält man hier $\varphi' = \sigma$ und $\varphi' - \varphi_n = 90^\circ$, d. h.

$$\delta_\infty = \frac{1}{2} \sin 4\sigma + \frac{1}{2} \sin^2 \sigma \sin 2\sigma \sin^2 2\varphi_n.$$

Die Bedingung $\frac{d\delta}{d\sigma} = 0$ liefert für den Winkel σ die Beziehung:

$$\sin^2 \sigma = \frac{16 - 3 \sin^2 2\varphi_n \pm \sqrt{(16 - 3 \sin^2 2\varphi_n)^2 - 8(16 - 4 \sin^2 2\varphi_n)}}{2(16 - 4 \sin^2 2\varphi_n)}.$$

Die sich hieraus ergebende Abhängigkeit des Drehmomentes δ_m von φ_n ist in Fig. 10 dargestellt; man sieht, daß an den hier betrachteten Scheiben eine Drehung der Würfelebene um die in der Scheiben-

ebene liegende Würfelkante den Wert des höchsten, der Würfelkante benachbarten Maximums nur wenig ändert (bis zu etwa $12^\circ/0$); das zweite Maximum ist das auf Orientierungsunterschiede schärfer ansprechende.

An den Beispielen der Figg. 7—9 bemerkt man stets eine vierzählige Symmetrie der Kurven. Wann eine solche eintritt, erkennt

man, wenn man die Potenzen des \sin und \cos in (4,2) ersetzt durch die \sin und \cos der ganzzahligen Vielfachen des Winkels. Zunächst sei bemerkt, daß, wenn σ das Intervall von 0 bis π durchläuft, nach (8a, b) die Variable φ' ein Intervall von der Länge π durchläuft, φ' jedoch ein kleineres Intervall. Man erhält

$$(4,4) \quad \delta_\infty = \left(\frac{7}{16} \sin 4\varphi' + \frac{1}{8} \sin 2\varphi' \right) \frac{\sin \sigma}{\sin \varphi'} \sin \varphi_n + g \sin (4\varphi' - \delta'),$$

wo g eine mit σ variierende Amplitude und δ' eine mit σ variable Phase ist;

$$g^2 = \left(\frac{1}{16} \sin 4\varphi' - \frac{1}{8} \sin 2\varphi' \right)^2 \frac{\sin^2 \sigma \sin^2 \varphi_n}{\sin^2 \varphi'} + \frac{(1 - \cos 2\varphi')^2}{4} \cos^2 \varphi_n,$$

$$\operatorname{tg} \delta' = - \frac{1}{4} \frac{\sin 4\varphi' - 2 \sin 2\varphi'}{1 - \cos 2\varphi'} \frac{\sin \sigma}{\sin \varphi'} \operatorname{tg} \varphi_n.$$

Ist φ_n klein, so daß man $\sin \varphi_n \approx 0$ und $\cos \varphi_n \approx 1$ setzen kann, d. h. praktisch eine Würfebene in der Blechebene liegt, so sieht man aus (4,4) unmittelbar, daß man vier Nullpunkte von $\delta_\infty(\sigma)$ bekommen muß; dasselbe erhält man für $\varphi_n \approx 90^\circ$; für alle übrigen Beispiele in Figg. 7, 8, 9 erhielten wir 4fache Symmetrie, was z. B. auch noch für die (321)-Ebene nachgeprüft wurde. Aus Stetigkeitsgründen ist daher anzunehmen, daß die Symmetrie von $\delta_\infty(\sigma)$ stets 4fach ist, mit Ausnahme der Oktaederebene, der gegenüber sich der Einkristall bei dem hier zugrunde gelegten Ansatz (1,2) praktisch so verhält, als ob er magnetisch isotrop wäre.

Um die Verhältnisse an Eisen ausreichend zu beschreiben, nahm Gans¹⁾ eine Erweiterung des Energieansatzes (1,2) vor, indem er die Kristallenergie in folgender Weise darstellte:

$$(4,5) \quad K(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2) + K' a_1^2 a_2^2 a_3^2.$$

1) R. Gans u. E. Czerlinsky, a. a. O.

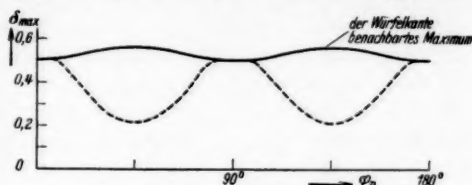


Fig. 10. Höchstwerte des Drehmoments von Scheiben, die eine Würfelkante in ihrer Ebene enthalten ($\varphi_n = 90^\circ$, φ_n beliebig)

Die Wirkung dieses zusätzlichen Energieanteils ist am stärksten in der Gegend der Raumdiagonale; man erkennt dies besonders deutlich an dem Schnitt der Energiefläche mit der Dodekaederebene, der in

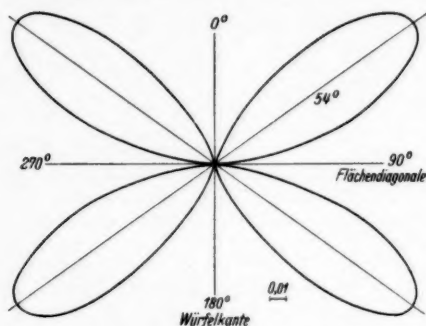


Fig. 11. Schnitt der Fläche $4\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$ mit der Dodekaederebene

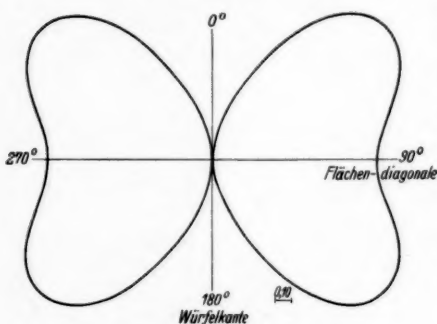


Fig. 12. Schnitt der Fläche $4(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2)$ mit der Dodekaederebene

Fälle der Würfel und Dodekaederebene bereits von Gans und Czerlinsky¹⁾ durchgeführt. Da z. B. in der Würfelebene der Höchstwert des Drehmomentes unabhängig von H ist (Fig. 2 und 4) gemäß der Theorie, so erstreckt sich der Gültigkeitsbereich der Theorie nur auf diejenigen Versuche, bei denen die von Hondo und Kaya²⁾, Webster³⁾ und Sucksmith, Potter und Broadway⁴⁾ gemessene

verschiedenen Maßstäben in den Figg. 11 und 12 angegeben ist. In den durch (1,8) gegebenen Polarkoordinaten schreibt sich der zusätzliche Energieanteil

$$\frac{K'}{16} \sin^2 \varphi \sin^2 2\varphi \sin^2 2\varphi.$$

Berücksichtigt man diese Korrektur nur in dem für unendlich großes Feld auftretenden Drehmoment δ_∞ , so ergibt sich, daß der oben ausgesprochene Satz über die Neigung der $\delta(\sigma)$ -Kurven in Ebenen, die eine Würfelkante enthalten, durch die Hinzufügung des Gliedes mit K' nicht geändert wird.

Von der Wiedergabe der sich hiermit ergebenden Korrekturkurven für das Drehmoment möge hier abgesehen werden.

5. Versuchsergebnisse

Der Vergleich zwischen Theorie und Versuch wurde für einfachere

1) R. Gans u. E. Czerlinsky, a. a. O.

2) K. Honda u. S. Kaya, a. a. O.

3) W. L. Webster, a. a. O.

4) W. Sucksmith, H. H. Potter u. L. Broadway, a. a. O.

Normalkomponente der Magnetisierung linear abhängt von $\frac{1}{H_a}$. In Fig. 13 sind die Versuchsergebnisse von Honda und Kaya an Eisen eingetragen, wobei die Stellen größten J_n benutzt wurden. Man erkennt, daß die Beobachtungen unmittelbar vor dem Sättigungsgebiet gemacht sind; denn der Steigungsfaktor der gestrichelten Geraden ergibt das zu unendlich großer Feldstärke gehörige Drehmoment, das sie in die aus den Meßpunkten gebildete Kurve praktisch ohne Knick einläuft. Die Versuche von Webster führen zu einer ähnlichen Darstellung. Aus Fig. 13 entnimmt man, daß demgemäß die Theorie etwa für das Gebiet $H_a > 1000$ Oe gilt, d. h. rund $h_a = \frac{H_a J_\infty}{K} > 4$.

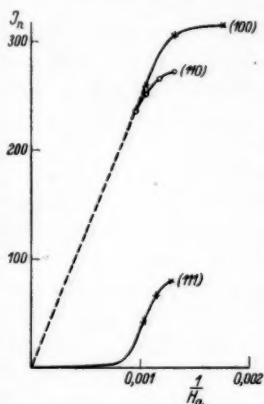


Fig. 13. Auswertung der Versuchsergebnisse von Honda und Kaya an Eisen

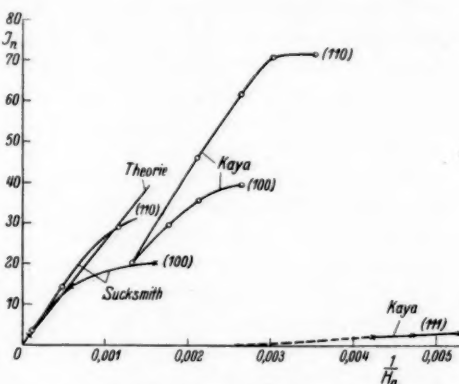


Fig. 14. Auswertung der Versuchsergebnisse an Nickel

Für Nickel werden die Verhältnisse durch Fig. 14 wiedergegeben; die mit „Theorie“ bezeichnete Gerade ist gemäß Gans und Czerlinsky¹⁾ berechnet mit $K = 5,12 \cdot 10^{-4}$ und $\frac{D}{VK} = 0,5$. Die Versuche von Sucksmith, Potter und Broadway nähern sich für etwa $H_a > 2000$, d. h. $h_a > 20$ dieser Geraden; die von den Autoren angegebenen inneren Feldstärken wurden dabei mit Hilfe des Entmagnetisierungsfaktors auf äußere Felder umgerechnet. Die Ergebnisse von Kaya²⁾ liefern zwar ziemlich den richtigen Anstieg des geradlinigen Anfangsstückes, sind jedoch gegenüber der Theorie zu

1) R. Gans u. E. Czerlinsky, a. a. O.

2) K. Honda u. S. Kaya, a. a. O.

kleineren Werten von J_n verschoben; erhöht man J_n um einen entsprechenden Betrag, so würde dies eine Gültigkeit der Theorie für $H_a > 700$ d. h. $h_a > 7$ bedeuten. Jedenfalls scheint sicher zu sein, daß bei Nickel die auf Drehungen des Magnetisierungsvektors gegründete Theorie höchstens in dem ganzen Bereich von h_a gilt, in dem sie für Eisen gilt; die Grenze für das im Innern der Probe wirksame Feld wird wegen der Entmagnetisierung dann noch etwas herabgesetzt, so daß sie günstigenfalls wohl die Hälfte betragen mag, wie man aus den Angaben von Honda und Kaya¹⁾ überschlägt.

Eigene Versuche dienten dazu, kritisch zu den Ansätzen der Theorie und zur Art der Durchführung der Versuche Stellung nehmen zu können, und andererseits einiges Erfahrungsmaterial beizubringen über die Anisotropiekante K des mit 4,4% Si legierten Transformatormaterials²⁾. An Einkristallscheiben (20 mm Durchmesser, 0,376 mm dick), die mit der Würfelfläche des Kristallgitters in der Blechebene lagen, ergab, sich bei großem Außenfeld (1000—2400 Örsted) für die Abhängigkeit des Drehmomentes vom Drehwinkel σ des Feldes die von der Theorie gemäß Fig. 2 geforderte Symmetrie. Da mit gegen ∞ wachsendem Feld die Höchstwerte der Kurve $D(\sigma)$ einem Grenzwert zustreben müssen, so wurde dieser bestimmt durch Messung der Kurve D_{\max}/G in Abhängigkeit von $1/H$, wobei G das Gewicht der Scheibe bedeutet. Fig. 15 zeigt das Versuchsergebnis (ausgezogene Kurve) und Fig. 15a die theoretisch, gemäß Formel (2,1) zu erwartende Kurve ($\varphi' = 22,5^\circ$); der Vergleich beider Figuren zeigt, daß offenbar die versuchsmäßig aufgetragenen Felder groß genug waren, um die Richtung der in Fig. 15a gestrichelten Wendetangente in Fig. 15 noch experimentell zugänglich zu bekommen. Ist s das spezifische Gewicht (in unserem Fall gleich 7,6), so gilt für den Grenzwert D von D_{\max} gemäß Fig. 15a und der Bedeutung von δ :

$$\frac{D_\infty}{G} = \frac{K}{981s} \cdot 0,53,$$

wobei s gemessen ist in g/cm^3 und K in erg/cm^3 ; die Zahl D_∞/G hat dann die Dimension cm. Man erhält somit

$$K = 2,56 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^3.$$

Da dieser Wert erheblich kleiner ist als die in der Literatur bis jetzt bekannten Werte von etwa $4,2 \cdot 10^6 \text{ erg/cm}^3$, ein kleiner Wert von K aber eine nur weiche Bindung der spontanen Magnetisierung an die Richtungen leichtester Magnetisierbarkeit bedeutet, so zeichnet sich das vorliegende Material durch eine besondere magnetische

1) K. Honda u. S. Kaya, a. a. O.

2) Sondermaterial „Hyperm 4“ der Fried. Krupp A.-G. mit besonders großen Kristallen.

Weichheit aus. Für den Fall, daß nun Theorie und Versuch tatsächlich von den gleichen Voraussetzungen ausgehen, darf der weitere Kurvenverlauf der Fig. 15 zu dem von Fig. 15a nicht in Widerspruch stehen. Es wurde daher zu jedem Wert von D_{\max} der zugehörige Wert von δ berechnet und aus Fig. 15 und 15a die betreffenden Werte von $1/H$ und $1/h$ entnommen; da $\frac{1}{H} = \frac{J_{\infty}}{K} \frac{1}{h}$ ($J_{\infty} = 1550$), so müßte sich aus H , h und K stets für J_{∞} derselbe Wert ergeben; der untere Teil Fig. 15 zeigt, daß sich in keiner

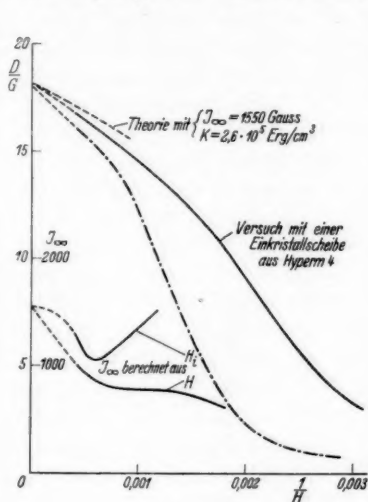


Fig. 15

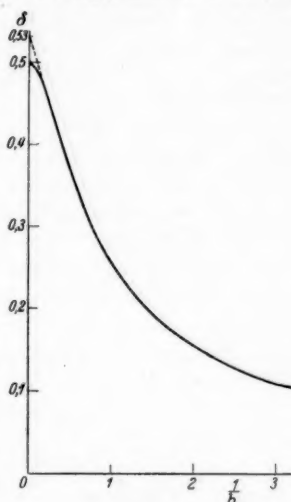


Fig. 15a

Weise Übereinstimmung ergibt, was offenbar davon herrührt, daß die Entmagnetisierung nicht vernachlässigbar ist im Gegensatz zu der im Verlauf von § 1 gemachten Annahme. Berücksichtigt man sie angenähert, indem man von H den Betrag NJ_{∞} subtrahiert, wobei der Entmagnetisierungsfaktor N gemäß Snoek¹⁾ zu 0,267 sich berechnet, so erhält man für J_{∞} in dem unteren Teil von Fig. 15 die aus $H_i = H - NJ_{\infty}$ berechnete Kurve (da in dem vorliegenden Fall für etwa $\frac{1}{H} < 0,00146$ stets $h > 2$ bleibt, so ist nach Fig. 5 hier das Gegenfeld NJ stets praktisch gleich NJ_{∞}); man erkennt, daß bis etwa $\frac{1}{H} = 2,10^{-4}$ d. h. $H > 5000$, also etwa für $h > 30$ der berechnete Werte von J_{∞} sich als konstant ergeben würde. Nur

1) J. L. Snoek, Physica 1. S. 649. 1934.

in diesem Gebiet ist also die übliche Art der rechnerischen Erfassung der Entmagnetisierung statthaft, während in dem Bereich der experimentell nicht allzu schwierig zugänglichen Felder die in § 1 skizzierte Rechnung in besserer Näherung durchgeführt werden müßte. Für die extrapolatorische Ermittlung von δ_∞ scheint jedoch der entmagnetisierungsbedingte Unterschied zwischen der vorliegenden Versuchsdurchführung und der hier vorgenommenen Art der Auswertung der Theorie, der sich auch in der Lage des Wendepunktes und der Wendetangente bemerkbar machen muß, einstweilen noch nicht für die Praxis Fehler von einer Größe zu geben, die nicht mehr tragbar wären. Legt man z. B. zwei Einkristallscheiben gleicher Abmessungen und Anisotropiekonstanten K , deren Ebene bei beiden

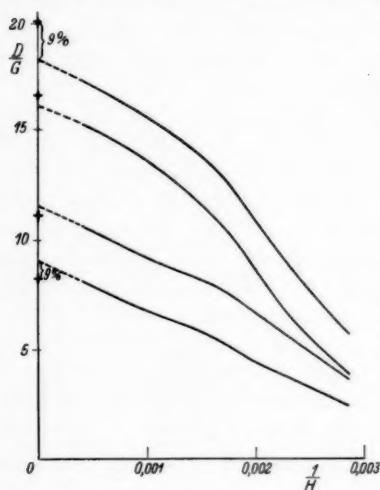


Fig. 16

die Würfelebene des Kristallgitters ist, so erhält man praktisch denselben extrapolatorischen Grenzwert δ_∞ , obwohl wegen des jetzt doppelt so großen Entmagnetisierungsfaktors ¹⁾ Wendepunkt und Wendetangente verschoben sind (vgl. die strichpunktierte Kurve von Fig. 15); stellt man in diesem Fall aber δ der als Funktion von $1/H_i$, so zeigen beide Kurven keine großen Abweichungen voneinander.

An einem Einkristall gleicher Abmessungen wie oben, in dessen Blechebene die (123)-Ebene, d. h. eine Translationsebene ²⁾, lag, wurde die von der Theorie geforderte Symmetrie gefunden (vgl.

Fig. 9); die für jeden der vier Extremwerte aufgenommene Abhängigkeit von der Feldstärke (Fig. 16) ergibt im Mittel $K = 3,3 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^3$, also einen etwas größeren Wert als den Einkristallen der Würfelebene; bei der Berechnung von K wurde angenommen, daß der geradlinig extrapolierte Wert gleich dem Grenzwert für unendlich hohes Feld sei, wodurch nach obigem K etwas zu groß ermittelt wird.

1) J. L. Snoek, a. a. O.

2) W. Fahrenhorst u. E. Schmid, Ztschr. f. Phys. 78. S. 383. 1932.

Die aus K berechneten Grenzwerte für unendlich großes Feld (durch Kreuze in Fig. 16 bezeichnet), weichen höchstens um 9% ab gegen die extrapolierten Werte. Diese Abweichung hat ebenso wie wohl auch der höhere Wert von K seinen Grund mit darin, daß sowohl die geradlinige Extrapolation in Fig. 16 einen Fehler hereinbringt, als auch in der hier durchgeführten Auswertung nicht genau genug enthaltene Entmagnetisierung das Ergebnis fälscht; es wurde daher davon abgesehen, durch eine Korrektur nach Art von (4,5) die oben genannten 9% Abweichung zum Verschwinden zu bringen, da es zunächst noch fraglich erscheint, ob ihr für die hier durchgeführten Versuche eine physikalische Bedeutung zukommt.

In welchem hohem Grade ein Ansatz von der Form (4,5) verwendet werden kann zur Erklärung der auch vom Verfasser an zwei Einkristallscheiben beobachteten Tatsache, daß dann, wenn die *Oktaederebene* in der Blechebene liegt, sich die Scheibe im Gegensatz zu der aus (4,3) für δ_∞ zu ziehenden Folgerung im Magnetfeld nicht isotrop verhält, möge hier noch offen bleiben, jedenfalls könnte eine genauere Lösung des Entmagnetisierungsproblems zeigen, daß dann, wenn das Außenfeld in der Oktaederebene liegt, das im Inneren der Scheibe herrschende wahre Feld wegen der Kristallanisotropie nicht in der Oktaederebene liegt, womit zugleich, mindestens zu einem beachtlichen Teil, ein vermeintlicher Widerspruch zwischen dem Versuch und der auf den Ansatz (1,2) zusammen mit (1,1) gegründeten Theorie sich eventuell aufklären ließe.

6. Zusammenfassung

In einem ersten Abschnitt über grundsätzliche Fragen wird gezeigt, daß zwei Gruppen von Gleichungen zu lösen sind zur Auswertung magnetischer Versuche, die in dem Gebiet hoher Felder vorgenommen sind, wo der Vorgang durch eine Drehung des Magnetisierungsvektors beschrieben werden kann; die eine Gruppe folgt aus dem Minimalproblem der Energie und liefert einen Zusammenhang zwischen dem inneren Feld und der Magnetisierung; die zweite Gruppe ergibt sich aus dem Problem der Entmagnetisierung und liefert einen Zusammenhang zwischen der räumlichen Verteilung von innerem Feld, Außenfeld und Magnetisierung. Eine exakte mathematische Behandlung steht noch aus.

Es wird allgemein gezeigt, daß eine im Magnetfeld mit ihrer Ebene parallel zum Feld aufgehängten Einkristallscheibe ein sprunghaft sich änderndes Drehmoment erfährt an solchen Stellen, wo das Gleichgewicht instabil wird. An den einfachen Fällen, wo eine Würfel- oder Dodekaederebene in der Scheibenebene liegt, ergibt

sich, daß Sprungstellen eintreten müßten, wenn der Magnetisierungsvorgang bis zu sehr kleinen Feldern als Drehprozeß sich abspielen würde. Nach Angabe einer Formel für die Berechnung der Magnetisierungskurve in beliebiger kristallographischer Richtung wird eine asymptotische Formel angegeben für das Drehmoment, das eine Scheibe in sehr großem Feld erleidet, und insbesondere der spezielle Fall von Scheiben betrachtet, in deren Ebene eine Würfelkante liegt. Es werden Gründe angegeben, die dafür sprechen, daß der Mechanismus der Drehung des Magnetisierungsvektors im allgemeinen erst für Felder $h = \frac{HJ_{\infty}}{K} > 4$ gilt. Versuche zeigen, daß für das Krupp-sche hochlegierte Transformatorenmaterial die Anisotropiekonstante K nur etwa $2,6 \cdot 10^5$ erg/cm³ beträgt, also magnetisch beachtlich weicher ist gegenüber dem z. B. von K. Honda u. S. Kaya benutzten schwedischen Eisen üblicher Verunreinigung. Es ergibt sich weiterhin aus Unterschieden, die einerseits durch die Art der Durchführung der Versuche und andererseits durch die Art der Auswertung der Theorie bedingt sind, von welcher Bedeutung das in der vorliegenden Arbeit nur in der üblichen, für den vorliegenden Gegenstand etwas rohen, Weise beachtete Problem der Entmagnetisierung ist.

Essen, Physikal. Versuchsanstalt der Fried. Krupp A.-G., im August 1936.

(Eingegangen 22. September 1936)

**Zur Methode der Sondenmessungen
in der Quecksilber-Niederdruck-Entladung*)**

Von Wollrath Denecke

(Mit 16 Figuren)

Inhaltsübersicht: A. Einleitung. Ziel der Untersuchungen. — B. Apparat. — C. Meßergebnisse und ihre Diskussion: 1. Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen; 2. Bestimmung des Raumpotentials; 3. Bestimmung der Elektronenstromdichten; 4. Bestimmung der Elektronenkonzentrationen; 5. Kontrolle der Wandladungsschichtdicken; 6. Verhalten der positiven Ionen. — D. Zusammenfassung. — E. Schrifttum.

A. Einleitung. Ziel der Untersuchungen

Nach Einführung der dynamischen Sondenmethode von Langmuir¹⁻⁵⁾ ist eine große Anzahl von Arbeiten erschienen, in denen diese Methode angewendet und erweitert ist. Mit dieser Methode ließ sich der experimentelle Nachweis erbringen, daß die Elektronen in der positiven Säule einer Niederdruckentladung eine Geschwindigkeitsverteilung besitzen, die der Maxwell'schen Verteilungsfunktion entspricht. Ein besonderes Ergebnis dieser neuen Untersuchungsmethode war es, daß unter gewissen noch nicht erfaßten Bedingungen im Plasma einer positiven Säule mehrere Geschwindigkeitsverteilungen der Elektronen nach Maxwell gefunden wurden. Dieses Ergebnis ist vielfach bestätigt worden. Seeliger und Hirschert⁶⁾ fanden bei höheren Drucken, kleinen Stromstärken und langen Sonden in der Glimmentladung geknickte Charakteristiken, die sie durch Überlagerung zweier Maxwellverteilungen der Elektronen zu erklären suchen. Mit kurzen Sonden erhalten sie stets nur eine Elektronentemperatur, die jedoch höher lag als die mit langen Sonden gemessene. Sie begründeten S-förmige Charakteristiken durch Wandverunreinigungen, und können sie durch passende Behandlung der Gefäßwände vermeiden. Druyvesteyn⁷⁾ hat durch 2 malige Differentiation der S-Charakteristiken, die im Niedervoltbogen in Ar und Ne gemessen sind, die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

*) Aus der von der Abteilung für Mathematik, Physik und Luftfahrt der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Dissertation.

bestimmt und kommt hierbei auf ein zweites Maximum der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungskurve, dem er eine höhere Temperatur zuschreibt. Ähnliche Ergebnisse haben Sloane und Emeleus⁸⁾ erhalten, die auch vielfach geknickte Charakteristiken in Ar fanden. Bei langen Sonden erhalten sie zwei Temperaturen, bei kurzen dagegen nur eine und zwar die hohe. Sie führen dies auf die positive Ionenschicht zurück, die sich um isolierte Teile im Plasma befindet, wodurch erstens allgemein die gemessene Elektronenkonzentration im Plasma vermindert wird, und zweitens vorzugsweise die langsamsten Elektronen unterdrückt werden. Kömmnick⁹⁾ findet im Hg-Niederdruckbogen geknickte Charakteristiken, deren Reproduktion in bestimmten Bereichen der Entladung jedoch zweifelhaft ist. Im allgemeinen findet er nur eine hohe Temperatur. H. Paul¹⁰⁾ findet in der geschichteten Säule in Wasserstoff im Schichtkopf ideale, in der Schichtmitte dagegen S-förmige Charakteristiken. Die Sonde wird hierbei durch die Anode in die Entladung eingeführt, sie wird durch eine lange Glaskapillare isoliert. Durch deren Aufladung können aber Störungen in der Entladung eintreten.

Infolge dieser Unsicherheit in der Bestimmung der Temperatur und den daraus sich ergebenden Unsicherheiten in der Bestimmung der Raumpotentiale, der Elektronen- und Ionenkonzentrationen erschien es notwendig durch systematische Messungen auf experimentellem Wege die Fragen zu klären; vor allem die Frage: welche Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen besteht wirklich in der freien ungestörten Entladung? Denn es erscheint unwahrscheinlich, daß bei Abwesenheit von störenden Wandladungseinflüssen in einem

beschränktem Raume der positiven Säule gleichzeitig mehrere Maxwellverteilungen oder Elektronentemperaturen bestehen können.

B. Apparat

Die Messungen wurden in einer Hg-Niederdruckentladung durchgeführt. Die Schaltung der Versuchsanordnung und die Ausbildung der Sonde zeigt Fig. 1. Das seitliche Hauptentladungsrohr, in

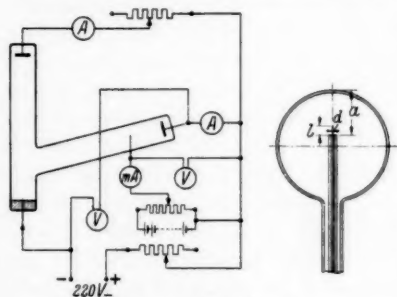


Fig. 1. Schaltschema
und Anordnung der Sonde

dem die Sondenmessungen durchgeführt wurden, hatte einen Durchmesser von 5 cm und eine Länge von 30 cm. Die Kathodenemission

wurde bei allen Messungen konstant auf 5,0 Amp. gehalten. Durch Veränderung des Widerstandes zwischen Haupt- und Nebenanode (obere Elektrode) konnte die Stromdichte im Hauptentladungsrohr bei gleichbleibendem Kathodenstrom geändert werden. Ein an der Kathodenzuführung befestigtes W-Blech diente in bekannter Weise zur Fixierung des Kathodenfleckes. Die zylindrische Sonde aus W-Draht von verschiedenem Durchmesser ist an einem Stahldraht angeschweißt, der durch einen Barometerverschluß führt, so daß sie von außen her durch den Rohrquerschnitt verschoben werden konnte. Als Sonden-träger diente ein Glasröhrchen von einigen Zentimeter Länge und 2,1 mm Durchmesser, das an seinem oberen Ende zu einer Kapillare ausgezogen war, durch die die Sonde gerade hindurchging. Am unteren Teil des Glasröhrchens war ein Eisenstück eingekittet; mit einem Magneten konnte somit der Sondenträger bewegt werden. Auf diese Weise gelang es, jede beliebige Sondenlänge einzustellen und gleichzeitig den Sondenträger an jede Stelle des Querschnitts zu bringen. In der bereits erwähnten Arbeit von Sloane und Emeleus⁶⁾ wurde eine ähnliche verschiebbare Sonde benutzt, jedoch wurde diese mit einem Metallrohr umgeben, an das verschiedene, bekannte Potentiale gelegt wurden.

Während der Messungen lief dauernd die Diffusionspumpe. Der am McLeod-Manometer abgelesene Restgasdruck war kleiner als $5 \cdot 10^{-6}$ mm Hg. Die Kathode des Entladungsgefäßes tauchte in ein Wasserbad, das durch eine von Wasser durchflossene Kühlschlange dauernd auf konstanter Temperatur gehalten wurde. Durch Druckluft wurde für gute Rührung und somit gleichmäßige Temperatur der Kühlfüssigkeit gesorgt. Der Hg-Dampfdruck betrug hierbei $5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg.

Der Sondenstrom und die Sondenspannung wurden mit Präzisionsinstrumenten gemessen, und zwar die Sondenspannung gegen Anode. Bei gleichbleibender Stromstärke in der Hauptentladung wurde die Anodenspannung auf 0,1 Volt genau konstant gehalten, da es sich in den Vorversuchen herausgestellt hatte, daß schon kleine Schwankungen in der Anodenspannung zu großen Schwankungen in den Meßergebnissen führten.

Es wurden drei grundsätzlich verschiedene Meßreihen quer zur Entladung bei jeweils gleichbleibendem SONDENDURCHMESSER d aufgenommen. Bei allen drei Reihen waren die äußeren Betriebsbedingungen konstant.

1. Veränderung der Sondenlänge l und des Abstandes a des Sondenträgers und zwar so, daß die Sonde stets die obere Gefäßwand berührt.

2. Der Sondenträger befindet sich in der Mitte des Entladungsröhres. Die Veränderung von l wird durch Herauschieben des W-Drahtes bewirkt. D. h. $a = \text{const} = 26 \text{ mm}$.

3. Verschiebung des Sondenträgers bei unveränderter Sondenlänge $l = \text{const}$.

C. Meßergebnisse und ihre Diskussion

1. Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

Die Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in der positiven Säule der Niederdruckentladung geschieht aus der Neigung der im halblogarithmischen Maßstab aufgetragenen Charakteristik $\ln i_- = f(V_s)$. Der Elektronenstrom i_- wird aus dem gemessenen Gesamtstrom i durch Subtraktion des positiven Ionenstromes i_+ erhalten. Der bei einer negativ gegenüber dem Raum geladenen Sonde auf diese treffende Elektronenstrom muß nach Langmuir die Gleichung erfüllen:

$$(1) \quad i_- = A \cdot j_- \cdot e^{-\frac{e(V_R - V_s)}{K \cdot T_-}}$$

Hierin bedeutet:

i_- = zur Sonde gelangender Elektronenstrom.

A = Sondenoberfläche.

j_- = Elektronenstromdichte.

V_R = Raumpotential.

V_s = Sondenpotential.

T_- = Elektronentemperatur, die der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen entspricht.

Bei der Ableitung dieser Formel ist von der Annahme ausgegangen, daß die Geschwindigkeiten der Elektronen nach der Maxwell'schen Verteilungsfunktion streuen. (Eine gute Übersicht über die wichtigsten Beziehungen, die bei den Sondenmessungen beobachtet werden müssen, findet sich z. B. im Handbuch der Physik¹¹⁾ und in dem Buch von Engel-Steenbeck¹²⁾. Die Gl. (1) gilt nur, so lange $V_s \leq V_R$ ist. Unter dieser Voraussetzung besteht zwischen $\ln i_-$ und V_s eine lineare Beziehung. Die Neigung der Geraden beträgt:

$$\frac{d \ln i_-}{d V_s} = \frac{e}{K \cdot T_-} = \frac{11600}{T_-}$$

Hieraus kann die Elektronentemperatur T_- bestimmt werden. Diese Elektronentemperatur kann durch die Beziehung

$$V = \frac{3K \cdot T_-}{2 \cdot e} = \frac{T_-}{7733}$$

in die mittlere Voltgeschwindigkeit umgerechnet werden.

In der Literatur sind häufig Beobachtungen angegeben, wonach die halblogarithmischen Meßergebnisse $\ln i_- = f(V_s)$ nicht mehr einer Geraden entsprechen⁸⁻¹⁰⁾. Es zeigen sich Knicke in dem Verlauf, woraus man zunächst rein formal auf 2 Temperaturen bzw. Elektronengeschwindigkeiten geschlossen hat, wobei aber auf die Entstehung zweier Maxwellverteilungen im Einzelnen nicht weiter eingegangen wurde. Da aber anzunehmen ist, daß in einem beschränkten Raum der positiven Säule in genügender Entfernung von den Gefäßwänden nur eine Elektronengeschwindigkeit bestehen kann, soll in Folgendem versucht werden, festzustellen, welche der bei den Messungen auftretenden Elektronengeschwindigkeiten wirklich im Plasma vorhanden ist.

Bei vielen der hier angestellten Versuche traten ebenfalls Abweichungen von der idealen Form der Charakteristik auf. Der Strom i_- stieg bei einem bestimmten gegenüber dem Raumpotential noch negativen Potential viel stärker an, als es nach dem bisherigen Verlauf zu erwarten war. Es ergaben sich also zwei verschiedene Neigungen der Charakteristik, aus denen nach der obigen Beziehung zwei verschiedene Temperaturen ermittelt werden konnten. Diese Abweichungen von der idealen Form der Charakteristik waren bei gleichbleibenden Versuchsbedingungen sehr gut reproduzierbar.

Bei Sondenlängen bis ungefähr 3 mm waren keine Knickpunkte in der Geraden festzustellen. Diese traten erst bei größeren Längen hervor. Der Sondendurchmesser war hierbei 0,8 mm, der Durchmesser des Sondenträgers 2,1 mm. Bei einem anderen Sonden-durchmesser von $d = 0,2$ mm traten die Knickpunkte bei ungefähr denselben Längen auf. Der Durchmesser des Sondenträgers war in allen Fällen derselbe. Nach den Arbeiten von Sloane und Emeleus⁸⁾ war zu schließen, daß die auf dem Sondenträger befindlichen Ladungen an dem Auftreten der zwei Temperaturen beteiligt sind. Diesen Einfluß der Wandladungen zeigt folgender Versuch.

Der Sondenträger befindet sich in der Mitte der Entladung ($a = 26$ mm). Die Sonde selbst ($d = 0,8$ mm) wird 5 mm lang gemacht, so daß gerade deutlich die beiden Geschwindigkeiten auftreten. Hierauf wird die ganze Anordnung, also Sonde und Sondenträger, soweit auf die Wand zu verschoben, daß die Sonde die obere Gefäßwand berührt ($a = 6,5$ mm). Es zeigt sich nur wieder eine, und zwar die große Geschwindigkeit. Fig. 2 zeigt die Meßpunkte. Um das Auftreten der 2 Temperaturen auch in der letzten Stellung zu erreichen, muß die Sondenlänge ungefähr 7 mm betragen. Dieser Versuch zeigt, daß in der Nähe von Wandladungen aus den Messungen 2 Geschwindigkeiten abgeleitet werden können.

Die Gefäßwände laden sich, wie jeder in die Entladungsbahn gebrachte isolierte Körper, gegenüber der eigentlichen Entladung negativ auf. Es bilden sich daher hier Raumladungsschichten aus,

deren Dicke später berechnet werden soll. Hier werden für die weiteren Betrachtungen nur die aus den Messungen sich ergebenden Werte zugrunde gelegt. Aus dem Kurvenverlauf der Raumpotentiale in Fig. 13 (vgl. später) ist zu ersehen, daß bei einer Sondenlänge von ungefähr 7 mm bei $d = 0,8$ mm der Einfluß der Wand nachläßt. (Bei $d = 0,2$ mm wird dieser Einfluß erst bei $l = 8$ gering). Der Störbereich der Wandladungen beträgt also $7 \div 8$ mm. Diese Schicht besteht sowohl an der Gefäßwand wie auch an dem Sondenträger.

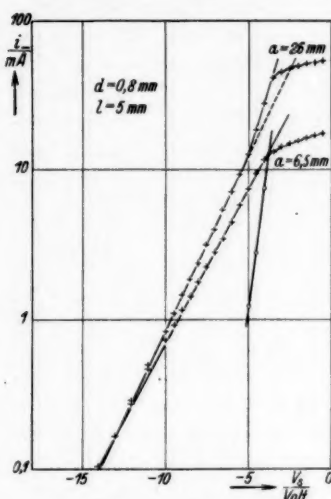


Fig. 2. Sondencharakteristiken bei gleichem l und verschiedenem a

treten kann, kann man nach dem Beispiel von A. v. Engel und M. Steenbeck (Bd. 2, S. 23) die Relaxationsstrecke S berechnen. Nach Engel-Steenbeck folgt:

$$S \approx 1,8 \cdot 10^3 \cdot \frac{T_-^2}{N_-}$$

Für zwei verschiedene Sondendurchmesser ergeben sich die Werte der Tab. 1.

Tabelle 1
Relaxationsstrecke S und Schichtdicke x

d mm	T ° K	N 10^{-3}	x cm	S cm
0,2	9700	2,2	0,8	0,8
0,8	9400	1,2	0,7	1,3

Für die Messungen bei $d = 0,2$ mm ist die errechnete Relaxationsstrecke gleich der Schichtdicke x , während sie bei $d = 0,8$ mm größer ist. Nach den Angaben von Engel-Steenbeck kann sich aber eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung unter den

Elektronen schon auf einer Weglänge ausbilden, die nur 50 % des errechneten Wertes beträgt. Unter dieser Annahme würde in beiden Fällen die Schichtdicke x größer sein als $S/2$, so daß sich innerhalb der Schicht eine neue Maxwellverteilung unter den Elektronen ausbilden kann. In die Schicht können alle Elektronen eindringen, die eine dazu normale Geschwindigkeitskomponente besitzen. Infolge der Feldwirkung von der Wand her, wird aber den Elektronen ein Teil ihrer kinetischen Energie entzogen, so daß die langsameren vollständig abgebremst wurden. Der Mittelwert der Geschwindigkeit innerhalb dieser Schicht wird also sicher größer sein als der in der freien Entladung, da ja nur die schnelleren durch die Schicht hindurchkommen und die Sonde bzw. die Wand erreichen können. Ein genauer Wert für diese Geschwindigkeit innerhalb der Schicht läßt sich nicht angeben. Als obere Grenze muß die Geschwindigkeit gelten, die durch die Größe der Wandaufladung (im vorliegenden Falle 5 Volt) gegeben ist.

Auf eine solche aufgeladene Wand können also nur diejenigen Elektronen gelangen, deren kinetische Energie

$$\frac{1}{2} m v^2 \geq e \cdot U$$

ist, wenn U der Potentialabfall innerhalb der Schicht ist. Wird in diese Schicht eine Sonde gebracht, so können offenbar nicht mehr alle Elektronen diese erreichen; die langsamsten werden durch das Feld in der Schicht abgebremst und zurückgetrieben. Je näher die Sonde der Wand gebracht wird, um so weniger Elektronen können sie erreichen.

Wenn also auch in der Entladung eine Maxwellverteilung der Elektronen besteht, so wird diese in der Nähe solcher Wandladungen nicht mehr voll bestehen. Die Fig. 3 zeigt eine Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilungskurve für eine Elektronentemperatur von 9000°K und eine Konzentration von $2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, wie sie aus gemessenen Werten bei $d = 0,2 \text{ mm}$ berechnet wurde.

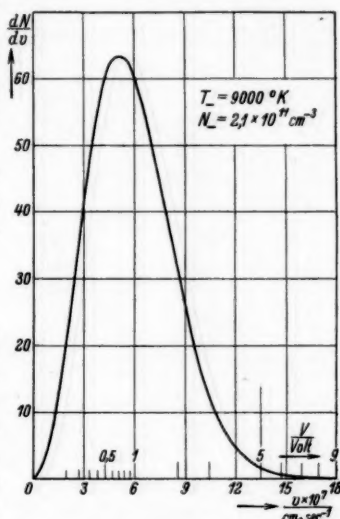


Fig. 3. Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

Die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen liegt bei 1,2 Volt. Die Wandaufladung beträgt, wie wir später noch sehen, ungefähr 5 Volt [J. v. Issendorf¹³⁾ nimmt sogar 10—15 Volt an]. Die Wand selber können nur die Elektronen erreichen, deren Geschwindigkeit größer als 5 Volt ist. Wie man aus Fig. 3 sieht, ist dieses nur ein sehr kleiner Teil sämtlicher Elektronen.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß sich bei kleinen Sondenlängen die gemessene Geschwindigkeit der Elektronen mit Annäherung an einen isolierten Körper stark ändert; denn je kleiner die Sonde wird, bzw. je mehr sie sich der Gefäßwand nähert, um so stärker wird der Einfluß der Wandladung auf die Sonde, d. h. um so mehr wird der Schnitt in Fig. 3 nach rechts nach größerer Geschwindigkeit verschoben.

Auch durch eine Potentialflächendarstellung läßt sich die scheinbare Zunahme der Elektronengeschwindigkeit mit abnehmender Sondenlänge erklären (vgl. Fig. 4).

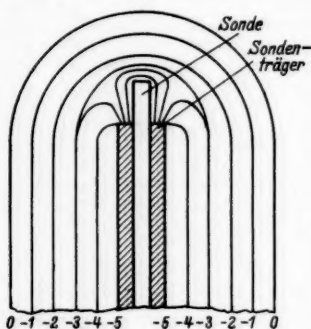


Fig. 4. Schematische Darstellung der Potentiallinien. $V_S = V_R$

Die Potentialflächen sind für den Fall gezeichnet, daß die Sonde sich gerade auf Raumpotential befindet. Die Sondenlänge ist kleiner als die sich um den Sondenträger ausbildende Schichtdicke. Es muß jetzt eine Potentialfläche geben, die sich in der Nähe der Sonde teilt. Diese Teilung tritt bei um so negativerem Potential auf, je kürzer die Sonde ist und umgekehrt. Die Potentialfläche, die diese Teilung zeigt, gibt auch gerade das Potential an, gegen das die Elektronen anlaufen müssen, um auf die Sonde zu gelangen. Man erkennt aus dieser Darstellung, daß die Potentialschwelle um so größer ist, je kleiner die Sonde wird. Es können also bei sehr kleinen Sonden nur die schnellsten Elektronen die Sonde erreichen, die langsamen werden durch die davor gelagerte Potentialschwelle von der Sonde ferngehalten. Die Elektronenstromdichte wird also bei verschiedenen Sondenlängen immer verschieden sein (solange die ganze Sonde noch innerhalb der Schicht ist), und zwar wird sich die Stromdichte bei verschiedenen Sondenlängen entsprechend der in der freien Entladung herrschenden Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ändern, da bei sich ändernder Sondenlänge die Potentialschwelle verschieden ist.

Mit diesen Überlegungen stimmten die Versuchsergebnisse durchaus überein (vgl. Fig. 8). Bei Annäherung der Sonde an die Gefäßwand (bei gleicher Länge $l = 1$ mm) wächst das Raumpotential stark an, außerdem wurde die Neigung der halblogarithmischen Geraden immer geringer; d. h. die Elektronengeschwindigkeit wird größer. Gleichzeitig sinkt bei gleicher Sondenspannung der auf die Sonde treffende Elektronenstrom; d. h. verringert sich die Elektronenkonzentration.

Nehmen wir jetzt eine Sonde, deren Länge l größer ist als die Dicke x der Wandladungsschicht. Wir können uns dann diese Sonde in 2 Teile zerlegt denken. Der eine Teil befindet sich innerhalb der Schicht, während der andere sich in der von der Wandladung des Sondenträgers unbeeinflussten freien Entladung befindet. Zur Vereinfachung machen wir auch noch die Annahme, daß innerhalb der Schicht überall die gleiche Elektronenkonzentration und Geschwindigkeitsverteilung herrscht.

In der freien Entladung haben die Elektronen eine Geschwindigkeitsverteilung entsprechend einer Temperatur T_1 , in der Schicht herrsche die Temperatur T_2 . Entsprechend werden die Längen, Stromdichten und Ströme bezeichnet. Der gesamte auf die Sonde fließende Strom besteht aus der Summe der beiden Einzelströme. Für Fall 2 (vgl. S. 600, $a = \text{const} = 26$ mm) ergibt sich das Bild der Fig. 5.

$$i_1 = j_1 \cdot l_1 \cdot \pi \cdot d \cdot e^{-\frac{\varepsilon V}{K \cdot T_1}}, \quad i_1 + i_2 = i$$

$$i_2 = j_2 \cdot l_2 \cdot \pi \cdot d \cdot e^{-\frac{\varepsilon V}{K \cdot T_2}}, \quad l_1 + l_2 = l$$

$$i = \pi \cdot d \left(l_1 \cdot j_1 \cdot e^{-\frac{\varepsilon V}{K \cdot T_1}} + l_2 \cdot j_1 \cdot e^{-\frac{\varepsilon V}{K \cdot T_2}} \right)$$

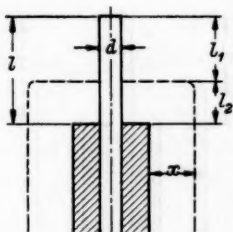


Fig. 5

Für den Gesamtstrom i ergibt sich aus dieser Betrachtungsweise eine Summe von 2e-Funktionen. Ist $l = l_2$, d. h. gleich der Schichtdicke x , so tritt nur die Temperatur T_2 in Erscheinung. Mit wachsendem l kommt immer mehr der Einfluß von T_1 mit hinzu. Es ist zu erwarten, daß sich der Knickpunkt mit größer werdendem l nach links verschiebt, da jetzt der Einfluß von l_1 größer wird. Die Tabellen zeigen die Ergebnisse für $d = 8$ mm. Die erste Spalte gibt die einzelnen Sondenlangen an. In der zweiten sind die Raumpotentiale angegeben, die sich mit wachsender Sondenlänge ändern müssen. Die dritte Reihe gibt an, bei welcher Sondenspannung V_k der Knickpunkt auftrat. In der vierten Reihe endlich sind die Differenzen $V_R - V_k$ gebildet.

Tabelle 2

Tabelle 3

Abhängigkeit des Knickpunktes V_K
und der Differenz $V_K - V_R$ von der Sondenlänge

Fall 1

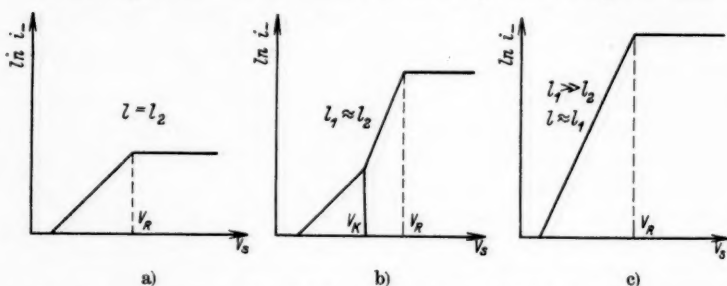
Fall 2

 a und l variabel $a = \text{const.}, l$ variabel

l mm	V_R Volt	V_K Volt	$V_R - V_K$ Volt
2	4,90	—	—
5	4,20	—	—
9	4,10	5,6	1,50
13	4,05	5,7	1,65
18,5	3,95	5,7	1,75
24,5	3,90	5,7	1,80

l mm	V_R Volt	V_K Volt	$V_R - V_K$ Volt
2	3,8	—	—
5	3,7	5,0	1,3
9	3,7	5,3	1,6
13	3,7	5,6	1,9
18,5	3,7	5,8	2,1
24,5	3,9	5,7	1,8

Im Fall 1 (vgl. S. 600) haben wir nicht x , sondern $2x$ einzusetzen, weil hierbei ständig zwei Wandladungen wirksam sind. Wie zu erwarten, tritt bei dieser Anordnung der Knickpunkt erst bei größeren Sondenlängen auf als im Fall 2. Bei der größten Länge im Falle 2

Fig. 6. Auftreten und Verschiebung des Knickpunktes bei verschiedenem l

($l = 24,5$ mm) muß er wieder nach rechts wandern, weil jetzt die Sonde in die Wandladungsschicht der Gefäßwand hineinragt. Bei diesen Überlegungen ist zu berücksichtigen, daß die Sonde nur ein mittleres Raumpotential anzeigt. Längs der Sonde ist ja sicher ein konstantes Potential, während in der Aufladung längs dieser Strecke ein solches nicht immer bestehen wird. Sloane und Emeleus⁸⁾ haben bei ihren Untersuchungen mit einer Doppelsonde ähnliche Ergebnisse erhalten. Als Sonde benutzten sie einen Molybdändraht, der durch einen Cu-Schutzring hin und her bewegt werden konnte. An diesen Schutzring konnten verschiedene Spannungen gelegt werden. Wurde er bei kleiner Sondenlänge ($l = 1$ mm) mit der Anode verbunden, so trat in der Charakteristik der Knickpunkt auf. Wurde unter sonst gleichen Verhältnissen an ihn ein stark negatives Potential

gelegt, so konnte aus der Charakteristik nur die große Geschwindigkeit bestimmt werden. Die Erklärung hierfür ist folgende: Solange der Schutzring mit der Anode verbunden ist, können dort keine Ionenraumladungen entstehen, die Elektronen können ohne Geschwindigkeitsverlust ungehindert die Mo-Sonde erreichen. Bei stark negativem Potential an dem Schutzring entsteht dort aber eine solche Schicht, durch die die langsamsten Elektronen von der Sonde ferngehalten werden. Der Schutzring entspricht in diesem Falle — bei negativem Potential — dem Sondenträger der vorliegenden Arbeit. Die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen also vollkommen die ähnlichen Untersuchungen von Sloane und Emeleus. Darüber hinaus soll aber auch ein Verfahren angegeben werden, wie auch bei kleinen oder verschiedenen Sondenlängen die *wirklich in der Entladung vorhandene Elektronentemperatur* bestimmt werden kann.

Eine einfache Überlegung, die gleichzeitig die Grundlage der Langmuirschen Sondenmethode ist, führt hier zum Ziel.

Wir bezeichnen mit \bar{v}_- die mittlere ungerichtete Geschwindigkeit der Elektronen im Plasma; j_- sei die Dichte des hierdurch hervorgerufenen Elektronenstroms; ist außerdem n_- die Konzentration der Elektronen, so gilt:

$$(2) \quad j_- = \frac{1}{4} \cdot e \cdot n_- \cdot \bar{V}_-.$$

Die mittlere ungerichtete Geschwindigkeit \bar{v} der Elektronen bleibt im Plasma an allen Raumstellen dieselbe. Nach dem Boltzmannschen Satze stehen die Elektronenkonzentrationen n_1 und n_2 an 2 Raumstellen 1 und 2, deren potentielle Energien sich um den Betrag $e \cdot V$ unterscheiden, im Verhältnis $e^{-\frac{e \cdot V}{K \cdot T}}$. Da nach Gl. (2) die Stromdichten j_- den Konzentrationen n_- proportional sind, so wird die Stromdichte j an einer Raumstelle 1, deren potentielle Energie um $e \cdot V$ gegenüber einer anderen Raumstelle 0 mit der Stromdichte j_0 kleiner ist

$$(3) \quad j_1 = j_0 \cdot e^{-\frac{e \cdot V}{K \cdot T}}.$$

Legen wir für die Messungen eine ideale Sonde zugrunde, d. h. eine punktförmige Sonde ohne Isolation, dann müssen im halblogarithmischen Maßstabe die Stromdichten für die dazugehörigen Raumpotentiale auf einer Geraden liegen, die der Gl. (3) entspricht. Aus der Neigung dieser Geraden kann eine Temperatur T_- berechnet werden, die der wahren Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in der Entladung entsprechen muß, denn die einzelnen Raumpotentiale sind ja nichts weiter als Stellen mit verschiedener potentieller Energie. Die einzelnen Charakteristiken müssen in diesem idealen

Fälle zusammenfallen, man erhält so den in Fig. 7 dargestellten Verlauf. Die Charakteristiken unterscheiden sich nur durch das Raumpotential, bei dem das Sättigungsgebiet beginnt, und somit auch durch den Wert der Stromdichte.

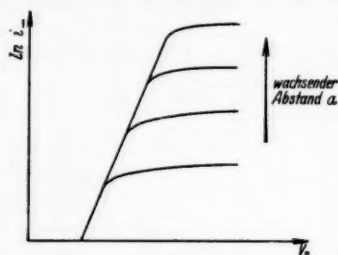


Fig. 7. Charakteristiken einer idealen Sonde

werden kann, deren Neigung (Vgl. hierzu Figg. 8 und 9.)

Messen wir mit einer wirklichen Sonde an mehreren Stellen des Querschnitts, so erhalten wir für die einzelnen Raumpotentiale V_R verschiedene Stromdichten j_- . Bei konstanter Sondenlänge l sind die Stromdichten den Strömen direkt proportional. Es zeigt sich nun, daß durch die einzelnen Raumpotentialströme sehr gut wieder eine Gerade gelegt die niedere Temperatur angibt. Diese Gerade entspricht durch-

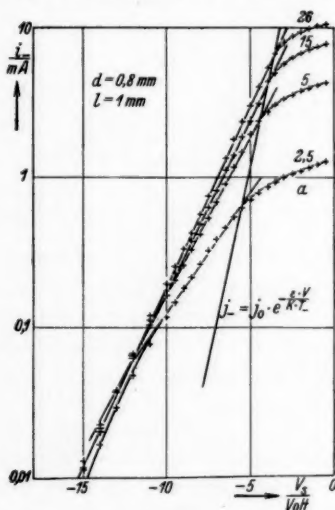


Fig. 8.

Bestimmung der wirklichen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Plasma bei konstanter Sondenlänge. $i_- = f(V_R)$

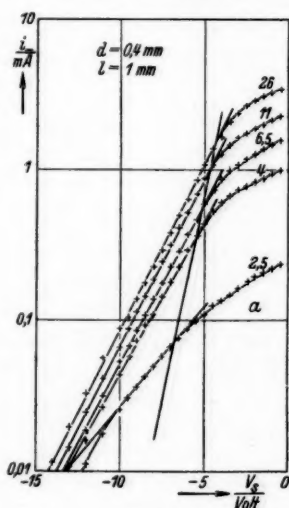


Fig. 9.

aus der Gl. (3), aus ihrer Neigung kann also die in der freien Entladung herrschende Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bestimmt werden. Aus Fig. 8 folgt für $d = 0,8 \text{ mm}$, $T = 9330^\circ \text{ K}$

= 1,21 \bar{V} . Aus Fig. 9 folgt für $d = 0,4$ mm, $T = 9300^\circ \text{K} = 1,20 \bar{V}$. Besonders erwähnenswert ist hierbei die Tatsache, daß in den einzelnen Charakteristiken diese niedere Temperatur gar nicht in die Erscheinung tritt, da die Sonde sehr klein gehalten wurde. ($l = 1$ mm).

Die Tabellen 4 und 5 geben die Zahlenwerte für die Figg. 8 und 9. Zu beachten ist der starke Anstieg des Raumpotentials in der Wandnähe und der damit zusammenhängende Abfall der Elektronenstromdichten.

Tabelle 4

 $d = 0,8$ mm, $l = 1$ mmElektronentemperatur, Raumpotential und Stromdichte als Funktion des Abstandes der Sonde von der Gefäßwand bei gleicher Länge l

a mm	T_- ° K	V_R Volt	j_- Amp./cm ⁻²
2,5	31200	5,5	0,022
5	23600	4,4	0,083
15	21900	4,0	0,140
26	21100	3,6	0,213

Tabelle 5

 $d = 0,4$ mm, $l = 1$ mm

a mm	T_- ° K	V_R Volt	j_- Amp./cm ⁻²
2,5	37700	6,8	0,005
4	24900	5,5	0,025
6,5	24200	5,15	0,039
11	22900	4,7	0,074
26	22600	4,4	0,109

Dieselben Betrachtungen lassen sich anstellen, wenn man mit verschiedenen Sondenlängen arbeitet. Bei veränderter Sondenlänge und konstantem oder verschiedenem Abstand a des Sondenträgers ergeben sich jeweils andere Raumpotentiale (vgl. weiter unten). Man bestimmt jetzt für mehrere Sondenlängen das jeweilige Raumpotential und die dazu gehörige Stromdichte. Diese Stromdichten werden im halblogarithmischen Maßstab über den entsprechenden Raumpotentialen aufgetragen. Die einzelnen Werte müssen wieder der Gl. (3) genügen. Es ergibt sich, wie in Fig. 10 gezeigt ist, wieder eine Gerade, aus deren Neigung abermals die kleine Geschwindigkeit bestimmt wird. Fig. 10 zeigt die Verhältnisse für 2 Sonden Durchmesser; $d = 0,8$ mm und $d = 0,2$ mm. Die Neigung beider Geraden ist dieselbe, so daß auch bei geändertem Sondenmesser die Geschwindigkeitsverteilung der Elek-

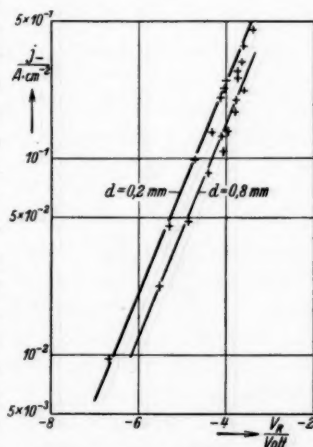


Fig. 10. Bestimmung der wirklichen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Plasma bei verschied. Sondenlängen.

$$j_- = f(V_R)$$

tronen übereinstimmend angegeben wird. Tab. 6 gibt für verschiedene Sondendurchmesser die nach diesem Verfahren bestimmten Elektronentemperaturen, wobei bei den einzelnen Meßreihen die Sondenlänge verändert wurde.

Tabelle 6
Elektronentemperaturen bei verschiedenen Sondendurchmessern

d mm	T ° K	T Volt
1,0	9400	1,23
0,8	9400	1,23
0,4	9200	1,19
0,2	9700	1,25

Die Elektronengeschwindigkeit läßt sich somit auf verschiedene Arten bestimmen. Bei langen Sonden erhält man oberhalb des Knickpunktes schon den richtigen Wert, bei kurzen Sonden muß man das oben angegebene Verfahren benutzen. Ein Vergleich zwischen den derart bestimmten Elektronengeschwindigkeiten ergibt, daß die einzelnen Abweichungen untereinander auch bei mehreren Sonden-

durchmessern nicht größer sind als 10%.

Bei veränderter Bogenstromdichte muß sich an derselben Stelle der Entladung ein anderes Raumpotential einstellen, d. h. an derselben Stelle haben wir jeweils eine andere potentielle Energie. Bestimmen wir also mit einer Sonde an derselben Stelle der Entladung bei verschiedenen Hauptstromdichten die Raumpotentiale und die hierbei auftretenden Stromdichten, so müssen diese beiden Werte in demselben Zusammenhang stehen, wie oben für verschiedene Abstände angegeben war. Es muß also auch hier gelten:

$$j_- = j_0 \cdot e^{-\frac{eV}{K \cdot T_-}}$$

Fig. 11 zeigt die Verhältnisse für die Sondenabmessungen:

$$d = 0,8 \text{ mm}, \quad l = 8 \text{ mm}.$$

Die Verbindungslinie der Raumpotentialströme ergibt wieder die niedrigere Temperatur. ($T_- = 9200^\circ \text{ K} = 1,19 \text{ Volt.}$)

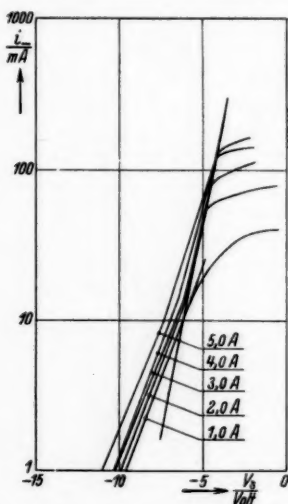


Fig. 11. Bestimmung der wirklichen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen im Plasma bei verschiedenen Hauptstromstärken.

$$j_- = f(V_R), \quad l = \text{const}$$

Aus dieser Figur ist noch zu erkennen, daß der Einflußbereich der Wandladungen bei verschiedenen Bogenstromdichten verschieden ist. Bei kleinen Hauptstromdichten ist er größer als bei großen. Daher tritt bei kleinen Stromdichten nur die große Geschwindigkeit auf, während bei großen Stromdichten der Knick in der Charakteristik sichtbar wird. Dieselben Messungen sind auch bei kleinen Sondenlängen durchgeführt. Das Ergebnis ist genau das gleiche, nur daß hierbei in den einzelnen Charakteristiken nur die hohe Geschwindigkeit auftritt. Die Neigung der Verbindungslinie der Raumpotentialströme liefert auch hier wieder die kleine Elektronengeschwindigkeit, die mit der nach dem Verfahren der Figg. 8—10 bestimmten Geschwindigkeit übereinstimmt.

Auf S. 603 hatten wir die Schichtdicke x an der Gefäßwand zu ungefähr 7 mm angegeben. Die Stromstärke im Hauptladungsrohr betrug hierbei 3,0 Amp. Wird diese auf 1,0 Amp. herabgesetzt, so muß die Schichtdicke entsprechend ansteigen. In einer Annäherungsrechnung kann man sagen:

$$j_+ \sim \frac{1}{x^2}$$

j_+ = positive Ionenstromdichte. Sie ist direkt proportional der Hauptbogenstromdichte J . $j_+ \sim J$. Also können wir setzen:

$$J \sim j_+ \sim \frac{1}{x^2}.$$

Bei 1,0 Amp. Bogenstromstärke wird also die Schichtdicke um den Wert $\sqrt{3}$ größer als bei 3,0 Amp. $x_{1A} = 12$ mm. In diesem Falle ($l = 8$ mm) ist die Länge l kleiner als die Schichtdicke x , es kann also nur eine und zwar die große Elektronengeschwindigkeit auftreten, wie auch die Messungen richtig ergaben.

2. Bestimmung des Raumpotentials

Das Raumpotential V_R in der positiven Säule einer Niederdruckentladung bestimmt man am einfachsten aus der im halblogarithmischen Maßstab aufgetragenen Charakteristik $\ln i_- = f(V_s)$. Solange $V_s < V_R$ ist, ergibt sich eine Gerade. Sobald aber $V_s \geq V_R$ wird, treten hiervon Abweichungen auf, wir erhalten ein Sättigungsgebiet. Der zur Sonde gelangende Strom i_- muß nun nach den verschiedenen Raumladungsgleichungen berechnet werden. Das Potential, bei dem diese Abweichung auftritt, ist das gesuchte Raumpotential. Zu bemerken ist, daß die Sonde stets nur einen mittleren Wert des längs ihrer gesamten Länge herrschenden Raumpotentials anzeigt. Es genügt daher nicht allein die Angabe der Sondenlänge, sondern es muß auch der genaue Stand der Sonde angegeben werden. Bei dem

Auftreten von mehreren Geschwindigkeiten ist zur Bestimmung des Raumpotentials stets der oberste Knickpunkt zu wählen. Diese Art der Bestimmung des Raumpotentials ist unabhängig von der Gestalt der Sonde; sie kann also in jedem Falle angewandt werden. Für Kugel- und Zylindersonden gibt es noch eine zweite Bestimmungsmöglichkeit, die aus den Raumladungsgleichungen folgt.

Für Zylindersonden gilt:

$$i_-^2 = A^2 \cdot j^2 \cdot \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\varepsilon (V_R - V_S)}{K \cdot T_-} \right).$$

Extrapoliert man aus dieser linearen Beziehung zwischen i_-^2 und V_s auf den Wert $i_- = 0$, so erhält man:

$$V_s = V_R - \frac{K \cdot T_-}{\varepsilon}.$$

Bei Kenntnis der Elektronentemperatur T_- kann man auf diese Weise das Raumpotential bestimmen.

Für Kugelsonden folgt ähnlich:

$$i_- = 4 \pi a^2 \cdot j \left(1 + \frac{\varepsilon (V_R - V_S)}{K \cdot T_-} \right).$$

Auch hier erhält man wieder bei Kenntnis T_- für $i_- = 0$ das Raumpotential.

Bei den Untersuchungen wurde eine Zylindersonde benutzt, deren Länge l verlängert werden konnte; für $l \gg d$ haben wir es mit einer wirklichen Zylindersonde zu tun; wird $l = d$, so kann die Sonde angenähert als Kugel betrachtet werden; wenn $l \ll d$, so liegt sehr angenähert der Fall der ebenen Sonde vor. Wie weit die einzelnen Bereiche gelten, wird an Hand der Messungen dadurch bestimmt, daß zunächst rein formal für jede Meßreihe die Bestimmung des Raumpotentials nach den Formeln für die ebene, Kugel- und Zylindersonde durchgeführt wurde. Es wurde also so verfahren, als ob die Sonde wirklich eine Ebene, ein Zylinder oder eine Kugel war. Hierbei bestätigten sich durchaus die oben angestellten Überlegungen.

Bei den Rechnungen für die Kugel- bzw. Zylindersonde geht in die Gleichung, aus der das Raumpotential bestimmt wird, die Elektronentemperatur mit ein. Hier muß natürlich die in der Entladung wirklich vorhandene, also niedrigere Temperatur eingesetzt werden. Fig. 12 zeigt die Verhältnisse bei einem Sondendurchmesser $d = 0,8$ mm. Das Raumpotential V_R ist in Abhängigkeit von der Sondenlänge l aufgetragen. Die Anordnung war so, daß die Sonde stets die obere Gefäßwand berührte und nur der Sondenträger nach unten verschoben wurde, d. h. die Länge der Sonde stetig zunahm (Fall 1). Die Auswertung der Meßreihen wurde unabhängig

von der Sondenlänge nach allen 3 Methoden durchgeführt. Zur Übersicht wurden auch noch die Werte $K \cdot T_-/\varepsilon$ eingetragen und zwar sowohl für die hohe wie für die niedere Temperatur. Bei großen Längen l zeigen die Bestimmungen des Knickpunktes der halblogarithmischen Geraden gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Berechnungen nach der Zylindersondenmethode. Für kleinere Längen bleiben diese Rechnungswerte hinter den Meßergebnissen zurück, statt dessen haben wir Übereinstimmung der Messungen und der Rechnungswerte nach der Kugelsondenmethode. Für sehr kleine Längen haben auch diese Rechnungen zu kleine

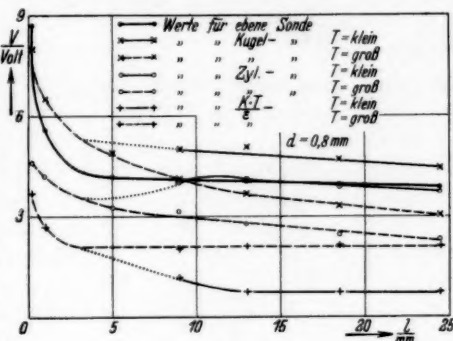


Fig. 12

Werte und wir können uns nur noch auf die Bestimmung des Knickpunktes der $\ln i_- - V_s$ -Geraden verlassen. Diese Methode liefert bei jeder Länge die richtigen Ergebnisse. Das wahre Raumpotential ist durch die stark ausgezogene Kurve gegeben, die mit der für die ebene Sonde erhaltenen Kurve zusammenfällt. Es ist aus den gemessenen Werten möglich, den Knickpunkt in der halblogarithmischen Geraden mit einer größten Abweichung von 0,1 Volt zu finden. Bei der Berechnung nach der Zylindersondenmethode können Fehler namentlich durch die Temperaturbestimmung eintreten. Die höchsten Abweichungen hierbei betrugen aber 10%, so daß bei einer Elektronentemperatur von $T_- = 95000^\circ \text{K}$ ein Fehler von weniger als 0,1 Volt für die Bestimmung des Raumpotentials besteht. Die Abweichungen zwischen diesen beiden Methoden bei langen Sonden liegen innerhalb dieser Fehlergrenzen. Aus Fig. 12 folgt also, daß bei $d = 0,8 \text{ mm}$ von $l = 8 \text{ mm}$ an die Berechnung des Raumpotentials nach der Zylindersondenmethode zu richtigen Ergebnissen führt. Für kleinere Längen ist nur die Bestimmung aus dem Knick der $\ln i_- - V_s$ -Geraden zuverlässig.

Für die in der Beschreibung der Apparatur angegebenen drei Fälle wurden die Raumpotentialmessungen bei einem Sondendurchmesser $d = 0,8 \text{ mm}$ durchgeführt. Im Fall 1 muß sich bei kleinen Sondenlängen ein größeres Raumpotential ergeben als im Fall 2, weil bei ersterem 2 negative Potentiale auf die Sonde einwirken,

während im 2. Falle nur die Wandladung des Sondenträgers Einfluß haben kann. Fig. 13 zeigt die erhaltenen Ergebnisse. Im Fall 3 betrug die Sondenlänge 1 mm; als Abszisse ist jetzt nicht l , sondern der Abstand a zu nehmen. Aus den Kurven 1 und 2 kann der Einfluß der Gefäßwand erhalten werden, wenn man berück-

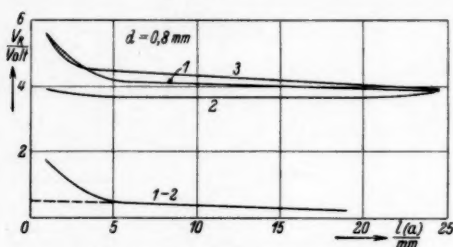


Fig. 13. Einfluß der Gefäßwand.

$$V_R = f(l) \text{ bzw. } f(a)$$

sichtigt, daß in beiden Fällen der Einfluß des Sondenträgers auf die Sonde für gleiches l derselbe ist. Die Differenzbildung 1—2 schaltet die Wirkung des Sondenträgers aus und gibt jetzt nur den Wirkungsbereich der Gefäßwand an. Mit dieser Differenzbildung darf man jedoch

nicht so weit gehen, daß bei Fall 2 die Sonde bei großem l schon in den Bereich der Gefäßwandladungen kommt. Bei ungefähr 7 mm ist der Einfluß der Gefäßwand verschwunden; daß hierbei die Differenzkurve noch nicht den Wert 0 erreicht hat, ist dadurch zu erklären, daß der Sondenträger im Fall 1 weiter in die Entladung hineinragt, wodurch sicher die ganze Entladung gestört wurde. Diese Störungen machten sich bei Hauptstromstärken von 0,6 Amp. ($0,033 \text{ Amp./cm}^{-2}$) so bemerkbar, daß die Anodenspannung etwas anstieg, wenn der Sondenträger bis an die obere Gefäßwand gebracht wurde.

Die Kurve für den Fall 3 ($l = \text{const} = 1 \text{ mm}$) muß im allgemeinen für alle Werte außer $l = 1 \text{ mm}$ höher steigen als die beiden anderen Kurven, da ja bei jeder Stellung die negative Aufladung des Sondenträgers auf die ganze Sonde einwirkte. Die Werte für a wurden hierbei insofern korrigiert, als a den Abstand von der inneren Gefäßwand bedeutet, um so zu dem gleichen Anfangspunkt für die Kurven 1 und 3 bei $l = 1 \text{ mm}$ zu kommen.

Bei den ganzen Messungen ist zu bemerken, daß die Sonde stets nur einen Mittelwert des längs ihrer ganzen Länge herrschenden Raumpotentials anzeigt; in diesen Mittelwert geht natürlich auch immer der Einfluß des Sondenträgers mit ein. Je länger die Sonde gemacht wird, um so weniger kommt dieser Einfluß zur Geltung. Es ist günstig, den Durchmesser des Sondenträgers sehr klein, dagegen den der Sonde möglichst groß zu wählen. Dieser Sonden-

ladung nicht zu viele Träger entzogen werden dürfen, da sonst hierdurch wieder eine Störungsquelle geschaffen wird.

3. Bestimmung der Elektronenstromdichten

Die Bestimmung der Stromdichten geschieht in den Punkten des Raumpotentials. Aus Gl. (1) folgt, wenn $V_S = V_R$ ist,

$$i_- = A \cdot j_-.$$

Es ist also der zur Sonde gelangende Elektronenstrom i_- durch die Sondenoberfläche A zu dividieren, um j_- zu erhalten. Wenn wir mit einer idealen Sonde in einer von keiner Wandladung beeinflussten Entladung messen, so wird die Stromdichte j_- für alle Längen l der Sonde dieselbe sein; da sich aber um den Sondenträger, sowohl wie um die Gefäßwand Wandladungen ausbilden, so ändert sich, wie wir sahen, mit wachsender Länge das Raumpotential (mit wachsendem l wird es kleiner). Damit wird aber nach der in dem Kapitel Temperaturbestimmung näher abgeleiteten Beziehung

$$j_- = j_0 \cdot e^{\frac{-eV}{kT_-}}$$

j_- größer. Bleibt das Raumpotential bei verschiedenen Längen konstant, so bleibt auch j_- konstant. Im Fall 1 fiel das Raumpotential ständig ab, folglich muß ein ständiger Anstieg von j_- stattfinden. Fig. 14 zeigt die Abhängigkeit der Elektronenstromdichte von der Sondenlänge für $d = 0,8$ mm. Die aus den einzelnen Messungen folgenden Werte sind durch Kreuze gekennzeichnet. Die Abweichungen sind auf ungenaue Bestimmung des Raumpotentials und vor allem der Sondenfläche zurückzuführen. Die eingezeichnete Kurve ist aus der Fig. 10 und 13 konstruiert.

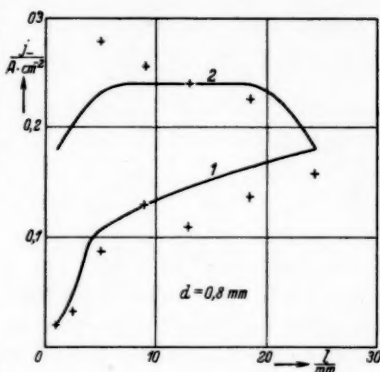


Fig. 14. $j_- = f(l)$

4. Bestimmung der Elektronenkonzentration

Bei Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen kann die Konzentration berechnet werden.

$$n_- = \frac{j_-}{e} \sqrt{\frac{2\pi \cdot m}{k \cdot T_-}} = 4,03 \cdot 10^{13} \frac{j_-}{\sqrt{T_-}}$$

j_- ist hierbei in Amp./cm² einzusetzen.

Weiter oben wurde darauf hingewiesen, daß beim scheinbaren Auftreten von zwei Geschwindigkeiten nur die kleinere in der Entladung wirklich besteht. Diese ist daher bei der Konzentrationsbestimmung einzusetzen. Der Verlauf der Konzentrationen in Abhängigkeit von der Sondenlänge (Fig. 15) ist genau der gleiche wie

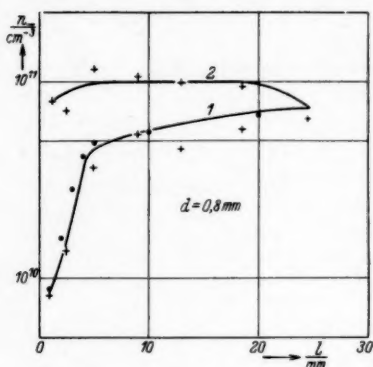


Fig. 15. $n = f(l)$

der der Stromdichten, so daß hierauf nicht noch einmal eingegangen wird. Es ist bei kleinen Sondenlängen nur darauf zu achten, daß auch wirklich der richtige Temperaturwert eingesetzt wird. Da bei kleinen Sondenlängen in der Charakteristik nur die große Geschwindigkeit auftritt, kann hier leicht die Konzentration zu niedrig ermittelt werden; es ist daher bei den Auswertungen stets die niedere Geschwindigkeit eingesetzt worden. Die Kreuze in Fig. 15 geben wieder die

einzelnen Meßergebnisse an, während die ausgezogenen Kurven durch Rechnung aus Fig. 15 nach obiger Beziehung erhalten wurden. Zu beachten ist der starke Abfall der Konzentration in der Nähe der Wand. Da mit der Sondenmethode in unmittelbarer Nähe der Wand und an der Wand selber keine brauchbaren Ergebnisse mehr erzielt werden können, sollen im folgenden Kapitel die Verhältnisse an der Gefäßwand durch eine Rechnung erfaßt werden.

5. Kontrolle der Wandladungsschichtdicken

Die Verhältnisse an der Gefäßwand können durch die Sondenmethode, wie sie zu den vorliegenden Messungen benutzt wurde, nicht erfaßt werden. Wir sind hierbei auf Rechnungen angewiesen, die nach den Angaben von Engel-Steenbeck¹⁴⁾ durchgeführt werden sollen; es sollen hierbei unter Benutzung der Meßergebnisse zahlenmäßige Angaben über die Konzentrationen, Potentiale usw. an der Wand gemacht werden, um so zum Schluß die Schichtdicke x dieser Wandstörungen errechnen zu können. Die vor den Gleichungen in Klammern () angegebenen Zahlen beziehen sich auf die fortlaufende Nummerierung im Engel-Steenbeck, Bd. 2. Die Gleichungen im Engel-Steenbeck sind unter der Voraussetzung

abgeleitet, daß die freie Weglänge klein ist gegenüber den Rohrdimensionen. Im vorliegenden Fall ist aber diese Voraussetzung nicht erfüllt; es muß also an Hand der Meßergebnisse zunächst geprüft werden, ob noch Übereinstimmung der Rechnung mit den Meßergebnissen vorliegt. Die Figg. 13 und 15 zeigen die Abhängigkeit der Raumpotentiale bzw. der Konzentrationen von der Sondenlänge. Hier besteht die Beziehung:

$$(181c) \quad V_2 - V_1 = - \frac{K \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{N_2}{N_1}.$$

Die Differenz $V_2 - V_1$ ergibt sich aus Fig. 13. Bei konstantem V_2 (für $l = 24,5$ mm) betrug $N_2 = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ mm}^{-3}$. Für verschiedene Werte von V_1 wurde jetzt N_1 berechnet. Die Ergebnisse sind in Fig. 15 als Punkte eingetragen. Man sieht, daß eine hinreichende Genauigkeit zwischen Rechnung und Messung vorliegt. Es ist also berechtigt, die Rechnungen auf den vorliegenden Fall anzuwenden.

Aus den GL (160), (157), (154), (170), (179) und (171) von Engel-Steenbeck (Bd. 2) läßt sich die Elektronenkonzentration an der Wand bestimmen zu:

$$N_R = 2,45 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}.$$

Nach GL (181f) folgt somit für das Wandpotential:

$$V_R - V_0 = - 4,93 \text{ Volt}.$$

Da die Annahme gemacht war, daß jeder Träger, der die Wand erreicht, dem Gasraum endgültig entzogen ist, daß also die Anlagungswahrscheinlichkeit = 1 vorliegt, so kann aus der Wandkonzentration der zur Wand gerichtete Strom berechnet werden. Diese Stromdichte beträgt:

$$j_R = \frac{1}{4} \cdot e \cdot N_R \cdot \bar{V} = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ Amp./cm}^{-2}.$$

Nunmehr kann nach den bekannten Raumladungsgleichungen für zylindrische Anordnung aus j_R und $V_R - V_0$ die Dicke der Raumladungsschicht an der Gefäßwand berechnet werden.

$$j_R = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{9} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{V^{3/2}}{r} = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{V^{3/2}}{r},$$

wenn j_R in Amp./cm⁻², V in Volt und r in cm eingesetzt wird,

$$r = 1,7 \text{ cm}.$$

Der Rohrradius betrug 2,4 cm; der Radius der Raumladungsschicht 1,7 cm. Somit wird die Schichtdicke selbst: $x = 0,7$ cm.

Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem schon vorher aus den Messungen sich ergebenden Wert überein.

6. Verhalten der positiven Ionen

Bei stark negativem Sondenpotential wird der Sondenstrom nur durch positive Ionen getragen. Wir erhalten in diesem Bereich eine lineare Beziehung zwischen Strom und Spannung. Für kleinere negative Spannungen überlagert sich diesem Ionenstrom der Elektronenstrom. Der Ionenstrom im Raumpotential kann in Annäherung durch Extrapolation erhalten werden, wie Fig. 16 zeigt. Für die „Temperatur“ der positiven Ionen lassen sich mit Sicherheit nur zwei Grenzen angeben. Die obere Grenze ist die Temperatur der Elektronen, die die Ionen jedoch infolge ihrer zu geringen Beweglichkeit nicht erreichen werden; die untere Grenze ist die Temperatur des neutralen Gases. In Annäherung nimmt man für die

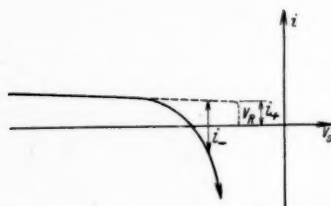


Fig. 16. Bestimmung des positiven Ionenstromes bei V_R

Annäherung nimmt man für die Temperatur T_+ der Ionen die halbe Elektronentemperatur an. $T_+ = \frac{T_-}{2}$. Mit dieser Annahme läßt sich die Konzentration der positiven Ionen berechnen. Sie liegt bei den vorliegenden Messungen ständig um den Faktor 3 ÷ 5 höher als die der Elektronen (bei sehr kleiner Sonde wird der Unterschied noch stärker, so daß also in der positiven Säule eine starke positive Raumladung vorhanden sein müßte. In anderen Arbeiten^{6,9)} treten sogar noch größere Unterschiede auf. Da derartige Raumladungen in einem hochionisierten Gase nicht möglich sind, so bestünde einmal die Möglichkeit, daß der positive Ionenstrom durch die Sondenmethode nicht richtig gemessen wird. Hierzu ist zu sagen, daß der genaue Abfall des positiven Ionenstroms in der Nähe des Raumpotentials durch den mehrere Zehnerpotenzen größeren Elektronenstrom nicht bekannt ist; es wird aber unwahrscheinlich sein, daß durch diese Fehlbestimmung ein derartiger Unterschied in der Konzentration hervorgebracht wird. Die in der Literatur angegebenen stärkeren Unterschiede zwischen n_- und n_+ können zum Teil dadurch begründet werden, daß zur Bestimmung der Elektronenkonzentration die hohe Temperatur gewählt wurde, wodurch die Konzentration zu klein angegeben wird. In den vorliegenden Messungen unterscheiden sich

Temperatur T_+ der Ionen die halbe Elektronentemperatur an. $T_+ = \frac{T_-}{2}$. Mit dieser Annahme läßt sich die Konzentration der positiven Ionen berechnen. Sie liegt bei den vorliegenden Messungen ständig um den Faktor 3 ÷ 5 höher als die der Elektronen (bei sehr kleiner Sonde wird der Unterschied noch stärker, so daß also in der positiven Säule eine starke positive Raumladung vorhanden sein müßte. In anderen Arbeiten^{6,9)} treten sogar noch größere Unterschiede auf. Da derartige Raumladungen in einem hochionisierten Gase nicht möglich sind, so bestünde einmal die Möglichkeit, daß der positive Ionenstrom durch die Sondenmethode nicht richtig gemessen wird. Hierzu ist zu sagen, daß der genaue Abfall des positiven Ionenstroms in der Nähe des Raumpotentials durch den mehrere Zehnerpotenzen größeren Elektronenstrom nicht bekannt ist; es wird aber unwahrscheinlich sein, daß durch diese Fehlbestimmung ein derartiger Unterschied in der Konzentration hervorgebracht wird. Die in der Literatur angegebenen stärkeren Unterschiede zwischen n_- und n_+ können zum Teil dadurch begründet werden, daß zur Bestimmung der Elektronenkonzentration die hohe Temperatur gewählt wurde, wodurch die Konzentration zu klein angegeben wird. In den vorliegenden Messungen unterscheiden sich

die beiden Elektronengeschwindigkeiten um den Faktor 3; der Unterschied zwischen n_- und n_+ würde somit beim Einsetzen der höheren Geschwindigkeit um $\sqrt{3}$ größer, so daß wir schon ein Verhältnis von $5 \div 9$ für die Ionen- und Elektronenkonzentration erhalten. Diese Zahlen sind durchaus in der Größenordnung, wie sie vielfach angegeben sind. Das noch vorhandene Überwiegen der positiven Ionen würde nach den neuesten Veröffentlichungen — insbesondere von Arnot — durch negative Ionen zu erklären sein, wie schon an anderer Stelle¹⁵⁾ ausführlicher angegeben wurde.

In den Tabellen 7 und 8 sind für verschiedene Sondenlängen die Werte der Elektronen- und Ionenkonzentration angegeben, sowie das Verhältnis beider.

Tabelle 7a und 7b

$d = 0,8 \text{ mm. } n_-, n_+, \frac{n_-}{n_+} \text{ in Abhängigkeit von der Sondenlänge}$

l mm	$n_- \times 10^{10}$ cm^{-3}	$n_+ \times 10^{10}$ cm^{-3}	$\frac{n_-}{n_+}$
2,5	7,1	42,5	0,17
5	11,6	44,0	0,26
9	10,7	37,2	0,29
13	10,0	36,0	0,27
18,5	9,4	30,6	0,31
24,5	6,5	25,6	0,25

Fall 2

l mm	$n_- \times 10^{10}$ cm^{-3}	$n_+ \times 10^{10}$ cm^{-3}	$\frac{n_-}{n_+}$
2,5	1,4	6,8	0,20
5	3,6	11,3	0,32
9	5,4	16,6	0,31
13	4,5	17,2	0,26
18,5	5,7	20,9	0,27
24,5	6,5	25,6	0,25

Fall 1

Tabelle 8a und 8

$d = 0,2 \text{ mm. } n_-, n_+, \frac{n_-}{n_+} \text{ in Abhängigkeit von der Sondenlänge}$

l mm	$n_- \times 10^{10}$ cm^{-3}	$n_+ \times 10^{10}$ cm^{-3}	$\frac{n_-}{n_+}$
1	5,7	60,4	0,09
2,5	9,7	67,1	0,14
4	15,9	73,9	0,22
7,5	18,5	84,1	0,22
12	15,3	74,5	0,21
20,5	13,7	51,6	0,27
24,5	11,2	49,7	0,23

Fall 2

l mm	$n_- \times 10^{10}$ cm^{-3}	$n_+ \times 10^{10}$ cm^{-3}	$\frac{n_-}{n_+}$
1	0,3	2,1	0,14
2,5	1,6	9,1	0,18
4	3,8	19,1	0,20
7,5	5,8	29,8	0,19
12	8,2	40,6	0,20
20,5	9,0	51,1	0,18
24,5	11,2	49,7	0,23

Fall 1

D. Zusammenfassung

Durch Messungen mit einer verschiebbaren Sonde wurde der Einfluß des Sondenträgers bzw. der Gefäßwand auf den zur Sonde fließenden Strom untersucht. Bei langen Sonden zeigen sich in

den halblogarithmischen Geraden Knicke, der Neigung des oberen Teiles entspricht die wirklich in der Entladung vorhandene Elektronentemperatur. Bei kurzen Sonden wird diese Temperatur stets zu hoch gemessen infolge einer um den Sondenträger sich ausbildenden Störschicht. Dieses ist darauf zurückzuführen, daß die Relaxationslängen für schnelle Elektronen von geringer Anzahl größer ist als für langsame Elektronen, daß also in die Störschicht eintretende schnelle Elektronen leichter zur Sonde gelangen können als langsame und sich gegenseitig in der Störschicht weniger beeinflussen. Durch Messung mit kurzen Sonden an verschiedenen Querschnitten oder an derselben Stelle mit verschiedenen Bogenstromdichten oder mit verschiedener Sondenlänge läßt sich auch die wahre Elektronentemperatur finden. Dieses ergibt sich aus der Boltzmannschen Beziehung.

Bei der Raumpotentialbestimmung gibt die Bestimmung des (oberen) Knickpunktes der $\ln i - V_p$ -Geraden immer die richtigen Werte. Für die Rechnung als Zylinder- bzw. Kugelsonde muß die niedere wahre Elektronentemperatur eingesetzt werden. Die Abweichung bei den Bestimmungsmöglichkeiten liegt innerhalb der Meßgenauigkeit. Bei der Bestimmung der Konzentration der Elektronen und positiven Ionen ergibt sich ein Überschuß der positiven Ionen um den Faktor 3—5, der hauptsächlich durch negative Ionen erklärt werden kann.

Die vorliegende Arbeit wurde in der Abteilung für technische Elektronik und Akustik des Physikalischen Institutes der Technischen Hochschule Braunschweig ausgeführt. Herrn Prof. Dr. E. Lübecke möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und seine ständig fördernde Unterstützung und Herrn Prof. Dr. H. Diesselhorst für sein Interesse herzlichst danken. Zu den Messungen wurden Apparate benutzt, welche dankenswerterweise die Deutsche Forschungsgemeinschaft Herrn Prof. Lübecke zur Verfügung gestellt hatte.

Schrifttum

- 1) J. Langmuir, Ztschr. f. Phys. **46**. S. 271. 1928.
- 2) H. M. Mott-Smith u. J. Langmuir, Phys. Rev. **28**. S. 727. 1926.
- 3) J. Langmuir u. K. B. Blodgett, Phys. Rev. **22**. S. 347. 1923.
- 4) L. Tonks, H. M. Mott-Smith u. J. Langmuir, Phys. Rev. **28**. S. 104. 1926.
- 5) J. Langmuir, Phys. Rev. **26**. S. 585. 1925.
- 6) R. Seeliger u. R. Hirschert, Ann. d. Phys. [5] **11**. S. 817. 1931.

- 7) M. J. Druyvesteyn, Ztschr. f. Phys. **64**. S. 781. 1930.
- 8) R. H. Sloane u. K. O. Emelius, Phys. Rev. **44**. S. 5. 1933.
- 9) J. Kömmnick, Ann. d. Phys. [5] **5**. S. 513. 1934.
- 10) H. Paul, Ztschr. f. Phys. **97**. S. 330. 1935.
- 11) Geiger-Scheel, Handb. d. Physik Bd. 14, S. 284ff.
- 12) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen Bd. 2, S. 25ff.
- 13) J. v. Issendorff, Wiss. Veröff. d. Siem.-Konz. **4**. S. 160. 1925.
- 14) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen Bd. 2, S. 80ff.
- 15) W. Denecke u. E. Lübecke, Phys. Ztschr. **37**. S. 347. 1936.

Braunschweig, Physikalisches Institut, Abteilung für technische Elektronik und Akustik.

(Eingegangen 26. September 1936)

Eine vorläufige Mitteilung über magnetische Nachwirkung

Von **Heinz Wittke**

(Mit 3 Figuren)

Ich hatte in meinen beiden letzten Veröffentlichungen¹⁾ über magnetische Nachwirkung im Prinzip die in Fig. 1 skizzierte Anordnung zugrunde gelegt. Darin bedeutete Sp eine Ringspule, die

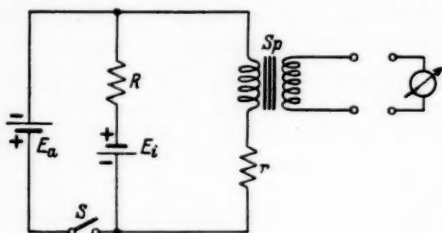


Fig. 1

mit dem zu untersuchenden Ferromagnetikum gefüllt ist, r ihren Eigenwiderstand und R einen parallel geschalteten Widerstand, E_i und E_a die Spannungsquellen, von denen E_a zur Zeit $t = 0$ durch den Schalter S abgeschaltet werden kann. Durch ein zur Zeit t an die Sekundärwicklung von Sp gelegtes ballistisches Galvanometer wird die dann noch in diesem Moment in Sp herrschende Induktion

$$\eta = B + \frac{b}{2} \quad \text{mit} \quad b = \eta_{\text{nr}} t = 0$$

bestimmt.

Mit dieser Anordnung konnte ich damals zeigen, daß für $a \gg \gamma$

$$(1) \quad \frac{\eta}{b} = C_1 \cdot e^{-at} + C_3 \cdot e^{-\gamma t}$$

ist, wenn man von Hysteresis absieht. Dabei sprach ich die Vermutung aus, daß das der Lösung (1) zugrunde gelegte Differentialgesetz

$$(2) \quad \dot{B} = \mu \cdot \dot{H} + \gamma (\mu_0 H - B)$$

1) H. Wittke, Ann. d. Phys. [5] 23. S. 442. 1935, ausführlicher in Schrift. d. Kbg. Gelehrt. Ges. Naturw. Klasse 12. Jahr, Heft 3. 1935.

nur als Näherung zu betrachten sein dürfte und man wahrscheinlich nicht mit einem γ -Wert zu rechnen haben würde, sondern mit allen $0 \leq \gamma \leq \infty$, wobei es Aufgabe weiterer Forschung sein müßte, durch Messungen über längere Zeiten t , als es mir damals möglich war ($0 \leq t < 1/30$ sec), die Verteilungsfunktion der γ zu ermitteln.

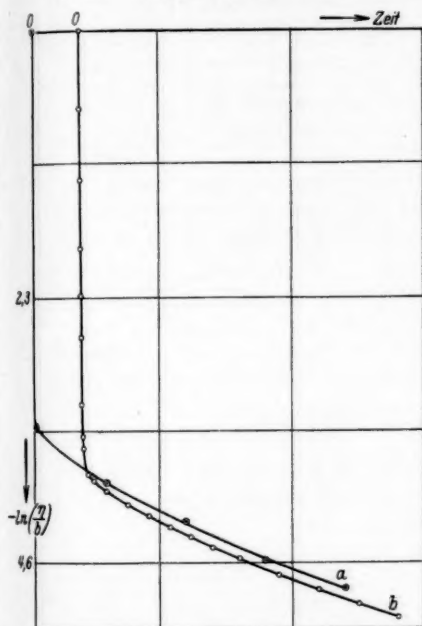


Fig. 2.

Die Tab. 1 gehört zu den Kurven a , zu den Kurven b gehören diese Angaben:
 $h = 632,1$ mOe; $b/h = 439,7$ Gauss/Oe; Ring Nr. 6v; Ringtemperatur $+19^\circ$ C;
 20. Januar 1936

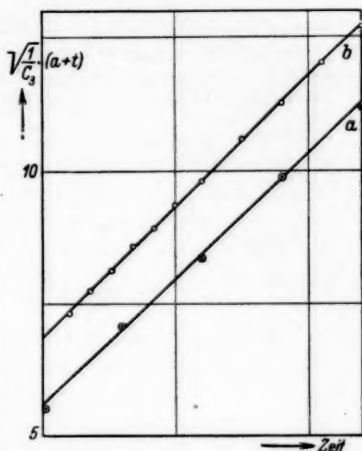


Fig. 3.

Ich habe jetzt derartige Messungen für $0 \leq t < 1,8$ sec abgeschlossen und dabei gefunden, daß Gl. (1) zu ändern ist in

$$(3) \quad \frac{\eta}{b} = C_1 \cdot e^{-at} + \bar{C}_3 \cdot \frac{1}{(a+t)^2}.$$

Betrachtet man also nur den Verlauf für größere Zeiten, so ist

$$(4) \quad \sqrt{\frac{2}{b}} \cdot \frac{1}{\eta} = \sqrt{\frac{1}{\bar{C}_3}} \cdot (a+t).$$

Ein in Tab. 1 wiedergegebenes Meßprotokoll und seine und einer anderen Meßreihe graphische Darstellung in Fig. 2 sowie beider Auswertungen nach (4) in Fig. 3 belegen diese Behauptung.

Tabelle 1

Am Anfange der Messung	Am Ende der Messung	Notierte Größen
21,0	21,0	Galvanometertemperatur in $^{\circ}\text{C}$
21,1	21,1	Zimmertemperatur . . in $^{\circ}\text{C}$
20,0	20,0	Ringtemperatur . . . in $^{\circ}\text{C}$
250,0	250,0	Eigenwiderstand r . . in Ohm
250,0	250,0	Parallelwiderstand R . in Ohm
1,016	1,016	Außenspannung E_a . . in Volt
2,02	2,02	Innenspannung E_i . . in Volt
$h = 243,1 \text{ mOe. Shunt } 3000. 15. 8. 1936. \text{ Ring Nr. } 6n.$		

Zeit in beliebigen Einheiten	Galvano- meteraus- schläge	$\log_{10} \frac{\eta}{b}$	$\sqrt{\frac{2}{b} \frac{\eta}{\eta}}$ für große Zeiten	
0	395,6	0,0000		Jeder Galvanometer-
100	13,00	1,4824	5,510	ausschlag gemittelt aus
3000	7,90	1,6987	7,070	5 Ablesungen bei $+ 7,6\%$
6000	5,66	1,8455	8,352	größtem Fehler einer Einzel-
9000	4,04	1,9899	9,885	ablesung gegen das Mittel
12000	3,16	2,0966	11,18	
0	393,8			

Die Eichung ergab $b/h = 354,3 \text{ Gauss/Oe.}$

Behält man das Differentialgesetz (2) bei, so ergibt sich daraus unter Berücksichtigung von (3) als gesuchte Verteilungsfunktion der γ

$$(5) \quad f(\gamma) = a^2 \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma a}.$$

Die mathematische Herleitung von (5) aus (2) und (3), die Messungsergebnisse über die Abhängigkeit der Konstanten C_3 und a von b und von der Temperatur (und den Einfluß elastischer Verspannungen auf sie) sowie die sich auf (2) und (5) gründende Diskussion der Messungen bei Wechselstromerregung statt der hier benutzten aperiodischen bilden eine abgeschlossene Arbeit. Sie wird jedoch äußerer Gründe wegen erst in nächster Zeit in dieser Zeitschrift ausführlich abgedruckt werden.

Königsberg Pr., I. Physikal. Institut, den 13. September 1936.

(Eingegangen 16. September 1936)

**Über den magnetischen Skineffekt
in ferromagnetischen Kreiszylindern
bei schwachen und starken Wechselfeldern¹⁾**

Von Bruno Kyewski

(Mit 11 Figuren)

A. Einleitung

Bringt man einen unendlich lang gedachten zylindrischen Leiter in ein longitudinales magnetisches Wechselfeld, so wird im Innern eine Wirbelstromverteilung auftreten, welche von dem Querschnitt des Leiters wie von der Frequenz und Amplitude des äußeren Wechselfeldes abhängt. Praktisch erzeugt man ein solches magnetisches Wechselfeld durch eine sehr lange Spule, welche von einem Wechselstrom durchflossen wird. Gegenüber dem gewöhnlichen Skin-effekt haben elektrische und magnetische Feldstärke ihre Rollen vertauscht. Zur Berechnung der Feldverteilung im Leiter ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta H - j 4 \pi \omega \sigma H = 0,$$

μ = Permeabilität,

ω = Kreisfrequenz,

σ = spezifische Leitfähigkeit

erforderlich. Nach der Integration liefert der komplexe Poyntingsche Vektor die Joulesche Wärmeentwicklung und die magnetische Feldenergie im Stab, dieselben sind für die induktive Heizung von Wichtigkeit. Für konstante magnetische Permeabilität läßt sich die obige Differentialgleichung mit Hilfe von Besselschen Funktionen lösen. O. Strutt²⁾ hat dieses Problem eingehend behandelt. Hier soll die Rechnung für ferromagnetische Kreiszylinder durchgeführt werden, wobei man sich zunächst auf schwache Felder beschränkt.

Die Aufgabe wurde für den gewöhnlichen Skineffekt von E. Hinze³⁾ näherungsweise gelöst. R. Becker⁴⁾ hat in einer Notiz zur Messung der Permeabilität mit Hilfe des Hauteffektes einen Fehler der Hinzschen Rechnung richtig gestellt.

1) Göttinger Dissertation.

2) O. Strutt, Ann. d. Phys. 82. S. 605. 1927; Arch. f. Elektrot. 19. S. 424. 1928.

3) E. Hinze, Ann. d. Phys. [5] 19. S. 143. 1934.

4) R. Becker, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 123. 1936.

B. Magnetischer Skineffekt bei schwachen Wechselfeldern

Im Gebiet kleiner Feldstärken kann man nach Rayleigh die Hysteresisschleife durch den Ansatz beschreiben:

$$(1) \quad \begin{cases} B = (\mu_0 + \varepsilon H_1) H - \frac{\varepsilon}{2} (H_1^2 - H^2) & \text{für den aufsteigenden Ast,} \\ B = (\mu_0 + \varepsilon H_1) H + \frac{\varepsilon}{2} (H_1^2 - H^2) & \text{für den absteigenden Ast.} \end{cases}$$

Beschränkt man sich auf die Frequenz der Grundwelle, so gelangt man durch Fourieranalyse zur komplexen Darstellung:

$$(2) \quad B = \left(\mu_0 + \varepsilon \left(1 - j \frac{4}{3\pi} \right) \cdot |H| \right) \cdot e^{j\omega t}.$$

Die magnetische Induktion B und die Feldstärke H sind somit um so stärker phasenverschoben, je größer die Amplitude ist. Nach Jordan besteht noch eine amplitudenunabhängige Nachwirkung; so daß man mit R. Becker den Ansatz zu:

$$(3) \quad \mu = \mu_0 - j\gamma + \varepsilon \left(1 - j \frac{4}{3\pi} \right) \cdot |H|$$

vervollständigen kann.

Die Differentialgleichung lautet für die magnetische Feldverdrängung in dem Fall konstanter Permeabilität:

$$(4) \quad \frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dH}{dr} - j \cdot 4\pi \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu \cdot H = 0.$$

Für veränderliches μ geht die Differentialgleichung über in:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dH}{dr} - j 4\pi \omega \sigma \mu_0 \left(1 - j \frac{\gamma}{\mu_0} \right) H - j 4\pi \omega \sigma \varepsilon \\ \cdot \left(1 - j \frac{4}{3\pi} \right) \cdot |H| \cdot H = 0. \end{cases}$$

Setzt man:

$$\sqrt{4\pi \omega \cdot \sigma \mu_0} \cdot r = kr = \varrho, \quad \sqrt{4\pi \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \mu_0} \cdot R = kR = \varrho_0,$$

$$\beta = \frac{\gamma}{\mu_0}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{\mu_0}, \quad b = \alpha \left(1 - j \frac{4}{3\pi} \right),$$

so lautet die Differentialgleichung:

$$(6) \quad \frac{d^2 H}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dH}{d\varrho} - j(1 - j\beta) H - j b \cdot |H| \cdot H = 0.$$

Für die Lösung der Differentialgleichung sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- a) der Fall niedriger Frequenzen $\varrho_0 < 1$,
- b) der Fall hoher Frequenzen $\varrho_0 \gg 1$.

a) Der Fall niedriger Frequenzen

Zur Lösung der Differentialgleichung

$$(7) \quad \frac{d^2 H}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dH}{d\varrho} - j(1-j\beta) \cdot H - j b \cdot |H| \cdot H = 0$$

benutzt man die Näherungsmethode:

$$(8) \quad H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots,$$

wobei für alle Werte von r vorausgesetzt wird, daß $|b| \cdot |H| \ll 1$ ist. Man erhält dann ein System von Differentialgleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d^2 H}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dH}{d\varrho} - j \cdot (1-j\beta) \cdot H_0 = 0, \\ \frac{d^2 H_1}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dH_1}{d\varrho} - j H_1 - j b \cdot |H_0| \cdot H_0 = 0, \\ \frac{d^2 H_2}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dH_2}{d\varrho} - j \cdot H_2 - j \cdot b \cdot |H_0| \cdot H_1 - j \cdot b \cdot \frac{(H_0 \bar{H}_1 + H_1 \bar{H}_0)}{2 \cdot |H_0|} H_0 = 0 \end{cases}$$

Im Fall niedriger Frequenzen läßt sich die Lösung des Systems der Differentialgleichungen mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes auffinden, da $\varrho < 1$ und $\varrho_0 < 1$ sind.

$$(10) \quad H(\varrho) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot \varrho^r.$$

Die nullte Näherung liefert dann²⁾:

$$(11) \quad \begin{cases} H_0 = a \cdot J_0(\sqrt{-(j+\beta) \cdot \varrho}) \\ = a \cdot \left[1 + \frac{\beta}{4} \varrho^2 - \frac{(1-\beta^2)}{64} \varrho^4 - \frac{(3\beta-\beta^3)}{36 \cdot 64} \varrho^6 \right. \\ \quad \left. + \frac{(1-6\beta^2+\beta^4)}{36 \cdot 64 \cdot 64} \varrho^8 + \dots \right] \\ + j \left(\frac{\varrho^3}{4} + \frac{2\beta}{64} \varrho^4 - \frac{1-3\beta^2}{36 \cdot 64} \varrho^6 - \frac{(4\beta-4\beta^3)}{36 \cdot 64 \cdot 64} \varrho^8 + \dots \right) \end{cases}$$

Die Entwicklung konvergiert gut für $\varrho < 3$, also in einem größeren Bereich als anfänglich verlangt.

In Fig. 1 ist die magnetische Feldstärke $H_0 = J_0(\sqrt{-(j+\beta) \cdot \varrho})$ als Vektor in der komplexen Ebene dargestellt, der Winkel φ bedeutet die Phasendifferenz von H_0 gegenüber der Drahtachse.

1) \bar{H} ist konjugiert komplex zu H .

2) J_m = Besselsche Funktion m ter Ordnung.

Da β klein ist, berücksichtigt man bei der Näherungslösung nur Größen erster Ordnung in β .

$$(12) \quad |H_0| = |a| \cdot \left[1 + \frac{\beta}{4} \varrho^2 + \frac{(1+\beta^2)}{64} \varrho^4 + \frac{(6\beta+10\beta^2)}{36 \cdot 64} \varrho^6 - \frac{15}{36 \cdot 64 \cdot 64} \varrho^8 + \dots \right],$$

$$(13) \quad |H_0| \cdot H_0 = a \cdot |a| \cdot \left[1 + \frac{(j+2\beta)}{4} \varrho^2 + \frac{\beta(1+4j)}{64} \varrho^4 + \frac{(8j+3\beta)}{36 \cdot 64} \varrho^6 + \dots \right].$$

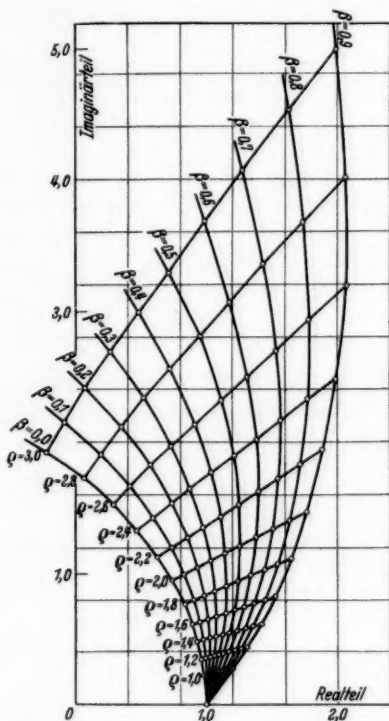


Fig. 1. Die magnetische Feldstärke in Abhängigkeit von β als Vektor in der komplexen Ebene dargestellt

Die erste Näherung in b ergibt:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= b \cdot a \cdot |a| \\ &\cdot \left[\frac{j}{4} \cdot \varrho^2 - \frac{2(1-j\beta)}{64} \varrho^4 - \frac{(2j+6\beta-j\beta)}{36 \cdot 64} \varrho^6 - \frac{(6+\beta+3\beta j)}{36 \cdot 64 \cdot 64} \varrho^8 + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Die magnetische Feldstärke beträgt:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} H &= a \cdot \left[J_0 \cdot (\sqrt{-(j+\beta) \cdot \varrho}) + b \cdot |a| \cdot \left(\frac{j}{4} \cdot \varrho^2 - \frac{2(1-j\beta)}{64} \cdot \varrho^4 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(2j+6\beta-j\beta)}{36 \cdot 64} \cdot \varrho^6 - \frac{(6+\beta+3\beta j)}{36 \cdot 64 \cdot 64} \cdot \varrho^8 + \dots \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Für $\beta = 0$ erhält man für die zweite Näherung in b :

$$(16) |H_0| \cdot H_1 = ba \cdot |a|^2 \cdot \left[\frac{j}{4} \cdot \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{32} + \frac{j \cdot 7}{36 \cdot 64} \cdot \varrho^6 - \frac{13}{6 \cdot 64 \cdot 64} \cdot \varrho^8 + \dots \right],$$

$$(17) \frac{H_0}{|H_0|} = \frac{a}{|a|} \cdot \left[1 + \frac{j}{4} \cdot \varrho^2 - \frac{2}{64} \cdot \varrho^4 - \frac{10j}{36 \cdot 64} \cdot \varrho^6 + \frac{74}{36 \cdot 64 \cdot 64} \cdot \varrho^8 + \dots \right],$$

$$(18) \begin{cases} H_0 \cdot \bar{H}_1 + H_1 \cdot \bar{H}_0 = |a|^3 \cdot \left[\frac{j(b - \bar{b})}{4} \cdot \varrho^2 + \frac{2(b + \bar{b})}{64} \cdot \varrho^4 \right. \\ \quad \left. + \frac{7j(b - \bar{b})}{36 \cdot 64} \cdot \varrho^6 + \frac{(b + \bar{b})}{2 \cdot 64 \cdot 64} \cdot \varrho^8 + \dots \right], \end{cases}$$

$$(19) H_2 = -ba \cdot |a|^2 \cdot \left[\frac{(3b - \bar{b})}{2 \cdot 64} \cdot \varrho^4 + \frac{(9b - 7\bar{b})j}{2 \cdot 36 \cdot 64} \cdot \varrho^6 + \frac{(6b + 18\bar{b})}{36 \cdot 64 \cdot 64} \cdot \varrho^8 + \dots \right].$$

Die magnetische Feldstärke wird für $\beta = 0$:

$$(20) \begin{cases} H = a \cdot \left[J_0(\sqrt{-j} \cdot \varrho) + b|a| \cdot \left(\frac{j}{4} \varrho^2 - \frac{\varrho^4}{32} - \frac{2j\varrho^6}{36 \cdot 64} - \frac{6\varrho^8}{36 \cdot 64 \cdot 64} + \dots \right) \right. \\ \quad \left. - b \cdot |a|^2 \cdot \left(\frac{(3b - \bar{b})}{2 \cdot 64} \cdot \varrho^4 + \frac{(9b - 7\bar{b})j}{2 \cdot 36 \cdot 64} \cdot \varrho^6 + \frac{(6b + 18\bar{b})}{36 \cdot 64 \cdot 64} \cdot \varrho^8 + \dots \right) \right]. \end{cases}$$

In Fig. 2 ist $H(\sqrt{-j} \cdot \varrho)$ in Abhängigkeit von α dargestellt. Die Hysteresis bewirkt bei schwachen Wechselfeldern für $\alpha = 1$ eine Vergrößerung von Phasenverschiebung und Amplitude der magnetischen Feldstärke gegenüber dem Fall konstanter Permeabilität.

Der Konstante a bestimmt sich aus der Bedingung, daß die Tangentialkomponente der Feldstärke eine Grenzfläche zweier Medien stetig durchsetzt.

$$H(\varrho = \varrho_0) = H_a = 0,4 \cdot \pi \cdot n \cdot i,$$

wenn der Strom mit i und die Anzahl der Spulenwindungen pro Längeneinheit mit n bezeichnet werden.

$$(21) \begin{cases} a = \frac{H_a}{J_0(\sqrt{-(j + \beta)} \cdot \varrho_0)} \\ \left[1 - \frac{b \cdot |H_a| \cdot \left(\frac{j}{4} \varrho_0^2 - \frac{2(1 - j\beta)}{64} \varrho_0^4 - \frac{(2j + 6\beta - j\beta)}{36 \cdot 64} \varrho_0^6 - \frac{(6 + \beta + 3j\beta)}{8 \cdot 36 \cdot 64} \varrho_0^8 + \dots \right)}{J_0(\sqrt{-(j + \beta)} \cdot \varrho_0) \cdot |J_0(\sqrt{-(j + \beta)} \cdot \varrho_0)|} \right]. \end{cases}$$

Der erzeugte Induktionsfluß ergibt:

$$(22) \quad \Phi = \frac{2\pi \cdot \mu_0 (1 - j\beta)}{k^2} \int_0^{\varrho_0} H \varrho d\varrho + \frac{2\pi \cdot \mu_0 b}{k^2} \int_0^{\varrho_0} |H| \cdot H \cdot \varrho \cdot d\varrho$$

oder

$$(23) \begin{cases} -\Phi = \frac{a}{2\omega \cdot \sigma \cdot j} \left[(\varrho_0 \cdot \sqrt{-(j + \beta)}) \cdot J_1(\varrho_0 \cdot \sqrt{-(j + \beta)}) \right. \\ \quad - b \cdot |a| \cdot \left(\frac{j\varrho_0^2}{2} - \frac{(1 - 3\beta j)}{16} \varrho_0^4 - \frac{(2j + 8\beta - \beta j)}{6 \cdot 64} \varrho_0^6 \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{(6 + 5\beta j + \beta)}{8 \cdot 36 \cdot 64} \varrho_0^8 + \dots \right) \right], \end{cases}$$

für $\beta = 0$ wird:

$$(24) \quad \begin{cases} -\Phi = \frac{a}{j 2 \sigma \omega} \cdot [(\varrho_0 \cdot \sqrt{-j}) \cdot J_1(\varrho_0 \cdot \sqrt{-j}) \\ - b |a| \left(\frac{j \varrho_0^2}{2} - \frac{2 \varrho_0^4}{16} - \frac{2 j \varrho_0^6}{6 \cdot 64} - \frac{6 \varrho_0^8}{8 \cdot 36 \cdot 64} - \frac{56 j \varrho_0^{10}}{10 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 64} \right) \end{cases}$$

In Fig. 3 ist der Induktionsfluß in Abhängigkeit von α aufgetragen. Bei den Auswertungen wurden in den Reihenentwicklungen die Glieder bis zu ϱ^{10} einschließlich berücksichtigt.

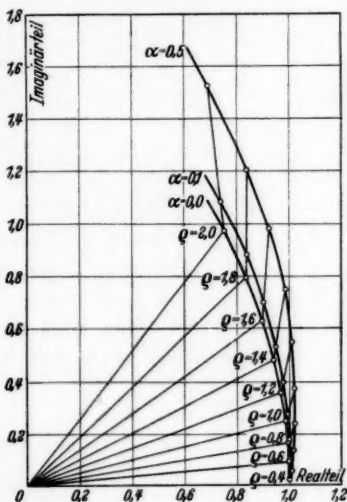


Fig. 2. Die magnetische Feldstärke als Vektor in der komplexen Ebene dargestellt

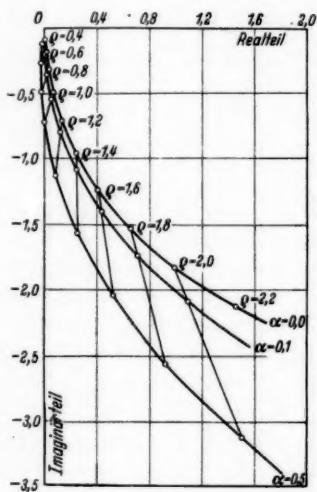


Fig. 3. Der Induktionsfluß

Zusammenfassend läßt sich über die magnetische Feldstärke und für den Induktionsfluß (dazu vgl. man Fig. 8) sagen, daß die charakteristische Konstante α eine Vergrößerung von Amplitude und Phasenverschiebung bewirkt, β dagegen eine Erhöhung der Amplitude und eine Verminderung der Phasendifferenz. Die erzeugte Joulesche Wärme beträgt:

$$(25) \quad Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \cdot F.$$

Die erzeugte magnetische Feldenergie ergibt:

$$(26) \quad W = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2}{\sigma} \cdot G,$$

wobei F = Realteil (L) und G = Imaginärteil (L) ist und

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= a \cdot \left[(\varrho_0 \sqrt{-j}) \cdot J_1(\varrho_0 \sqrt{-j}) \right. \\ &\quad \left. - b \cdot |a| \cdot \left(\frac{j \varrho_0^2}{2} - \frac{2 \varrho_0^4}{16} - \frac{2j \varrho_0^6}{6 \cdot 64} - \frac{6 \varrho_0^8}{8 \cdot 36 \cdot 64} - \frac{56j \varrho_0^{10}}{10 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 64} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Für $\varepsilon = 0$ gehen die beiden Ausdrücke (25), (26) in jene Form über, welche M. O. Strutt in seiner Arbeit abgeleitet hat. In Fig. 4 stellt F die dissipierte Wärme im Kern, G die Kernreaktanz als Funktion einer Wechselstromkonstanten \times Kernhalbmesser dar.

Die Kurven zeigen, daß in ferromagnetischen Kreiszylindern ($\alpha > 0$) bei schwachen Wechselfeldern eine Erhöhung der Jouleschen Wärme und der magnetischen Feld-

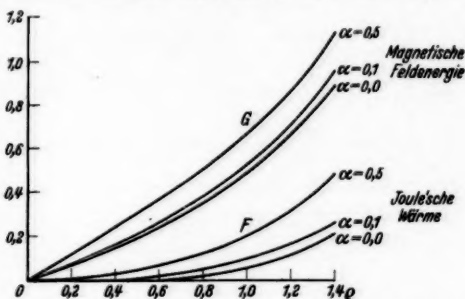


Fig. 4. Kurven für die magnetische Feldenergie und Joulesche Wärme in Abhängigkeit von q dargestellt

energie gegenüber dem Fall konstanter Permeabilität ($\alpha = 0$) eintritt.

b) Der Fall hoher Frequenzen

Da im Fall hoher Frequenzen der Skineffekt sehr stark ausgeprägt ist, kann man die Oberfläche des Drahtes als eben betrachten. (6) läßt sich auch schreiben:

$$(28) \quad \frac{1}{q} \cdot \frac{d}{dq} \left(q \cdot \frac{dH}{dq} \right) - j(1 - j\beta) \cdot H - j b \cdot |H| \cdot H = 0.$$

Für den Bereich hoher Frequenzen ist $\varrho_0 \gg 1$. Führt man die Transformation $s = \varrho_0 - q$ ein, wobei man unter s die mit k multiplizierte Entfernung von der Drahtoberfläche versteht ($s \ll \varrho_0$), so geht die Differentialgleichung über in:

$$(29) \quad \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{\varrho_0 - s} \cdot \frac{dH}{ds} - j(1 - j\beta) \cdot H - j b \cdot |H| \cdot H = 0.$$

Beschränkt man sich auf Glieder nullter Ordnung in s/ϱ_0 , so fällt der Ausdruck $-\frac{1}{\varrho_0 - s} \cdot \frac{dH}{ds}$ fort, d. h., man betrachtet die Drahtoberfläche als eine Ebene.

$$(30) \quad \frac{d^2 H}{ds^2} - j(1 - j\beta) \cdot H - j b \cdot |H| \cdot H = 0.$$

Man bestimmt eine Näherungslösung so, wie sie R. Becker durchführte, indem man von b alle Potenzen höher als zweiter Ordnung vernachlässigt.

Man setzt die Lösung in der Form an:

$$(31) \quad H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$$

H_1 soll klein von der Größenordnung b und H_2 von b^2 sein; dann wird:

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{d^2 H_0}{ds^2} - j(1-j\beta) \cdot H_0 = 0, \\ \frac{d^2 H_1}{ds^2} - j \cdot H_1 - j b \cdot |H_0| \cdot H_0 = 0, \\ \frac{d^2 H_2}{ds^2} - j \cdot H_2 - j b \cdot |H_0| \cdot H_1 - j b \frac{(H_0 \cdot \bar{H}_1 + H_1 \cdot \bar{H}_0)}{2 \cdot |H_0|} \cdot H_0 = 0. \end{cases}$$

Da β ebenfalls klein ist, so sollen bei der Näherungslösung alle Quadrate und höheren Potenzen von β vernachlässigt werden.

Die nullte Näherung in b liefert:

$$(33) \quad H_0 = C \cdot e^{-\frac{1+j}{V^2} \cdot s} \cdot \left(1 - j \cdot \frac{\beta}{2}\right).$$

Die erste Näherung in b ergibt:

$$(34) \quad H_1 = \frac{C \cdot |C| \cdot j \cdot b}{\frac{3}{2} + j} \cdot e^{-\frac{2+j}{V^2} \cdot s}.$$

Die zweite Näherung in b beträgt:

$$(35) \quad H_2 = \frac{j \cdot b \cdot e^{-\frac{3+j}{V^2} \cdot s}}{2(2+j)} [\alpha \cdot C \cdot |C|^2 \cdot (0,503 + j \cdot 0,331) + \alpha \cdot C^3 \cdot 0,503],$$

$$(36) \quad \begin{cases} H = C \cdot e^{-\frac{1+j}{V^2} \cdot s} \cdot \left(1 - j \cdot \frac{\beta}{2}\right) + \frac{C \cdot |C| \cdot j \cdot b}{\left(\frac{3}{2} + j\right)} \cdot e^{-\frac{2+j}{V^2} \cdot s} \\ + [\alpha \cdot C \cdot |C|^2 (0,503 + j \cdot 0,331) + C^3 \cdot \alpha \cdot 0,503] \frac{j \cdot b \cdot e^{-\frac{3+j}{V^2} \cdot s}}{2 \cdot (2+j)}. \end{cases}$$

Die Integrationskonstante C bestimmt sich aus der Bedingung, daß an der Drahtoberfläche für $s = 0$ $H_a = 0,4 \cdot \pi \cdot n \cdot i$ wird.

$$(37) \quad H_a = 0,4 \cdot \pi \cdot n \cdot i = C \left(1 + \frac{|C| \cdot j \cdot b}{\frac{3}{2} + j}\right).$$

$$\frac{j \cdot b}{\left(\frac{3}{2} + j\right)} = \alpha \cdot (0,503 + j \cdot 0,331).$$

In erster Näherung gilt für die Integrationskonstante C:

$$(38) \quad C = H_a \cdot \left(1 - \frac{|H_a| \cdot j \cdot b}{\frac{3}{2} + j} \right).$$

Man erhält in erster Näherung für den erzeugten Induktionsfluß:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= 2\pi \int_0^R (1 + b \cdot |H|) H r \cdot dr = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{\frac{R}{V^2}} (1 + b \cdot |H|) \cdot H \cdot (\varrho_0 - s) ds \\ &= \frac{2\pi \varrho_0}{k^2} \int_0^{\infty} (1 + b |H|) H \cdot ds. \end{aligned} \right.$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} |H| &= \left| C \cdot e^{-\frac{1+j}{V^2} \cdot s} + \frac{|C| C \cdot j b}{\left(\frac{3}{2} + j\right)} \cdot e^{-\frac{2+j}{V^2} s} \right| \\ &= |C| \cdot e^{-\frac{s}{V^2}} \left(1 + |C| \cdot \alpha \cdot 0,503 \cdot e^{-\frac{s}{V^2}} + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

$$(41) \quad \Phi = \frac{2\pi \cdot \mu_0 (1-j \cdot \beta)}{k^2} \varrho_0 \int_0^{\infty} H \cdot ds + \frac{2\pi \varepsilon \left(1 - j \frac{4}{3\pi}\right)}{k^2} \varrho_0 \int_0^{\infty} |H| \cdot H \cdot ds,$$

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} -\Phi &= \frac{2\pi \varrho_0 \cdot \mu_0}{k^2} \cdot C \cdot \left[e^{-\frac{1+j}{V^2} \cdot s \cdot \left(1-j \frac{\beta}{2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{2} (1-j\beta)}{(1+j) \cdot \left(1-j \frac{\beta}{2}\right)} \right. \\ &\quad + |C| \alpha \cdot (0,503 + j \cdot 0,331) \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{2+j}{V^2} \cdot s}}{2+j} \\ &\quad + |C|^2 \alpha^2 (0,134 + j \cdot 0,219) \sqrt{2} \cdot \frac{e^{-\frac{3+j}{V^2} \cdot s}}{3+j} \\ &\quad + \left(1 - j \frac{4}{3\pi}\right) |C| \alpha \sqrt{2} \cdot \frac{e^{-\frac{2+j}{V^2} \cdot s}}{2+j} \\ &\quad \left. + \left(1 - j \frac{4}{3\pi}\right) \cdot |C|^2 \cdot \alpha^2 \cdot 1,006 + j \cdot 0,331 \right) \sqrt{2} \cdot \frac{e^{-\frac{3+j}{V^2} \cdot s}}{3+j} \right]_0^{\infty}. \end{aligned} \right.$$

Die zeitliche Änderung des Induktionsflusses ist:

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dt} \right)_{s=0} &= \frac{2\pi \omega \cdot \mu_0}{k^2} \cdot \frac{k \cdot R}{\sqrt{2}} \cdot H_a \cdot \left[1 + \frac{\beta}{2} + j \cdot \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + (0,503 + j \cdot 0,331) \alpha \cdot |H_a| + (0,182 + j \cdot 0,789) \cdot \alpha^2 \cdot |H_a|^2 + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Die entwickelte Joulesche Wärme beträgt:

$$(44) \quad Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \cdot F,$$

$$(45) \quad F = \frac{kR}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\gamma}{2\mu_0} + 0,503 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right) |H_a| + 0,182 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^2 |H_a|^2 + \dots \right).$$

Die erzeugte magnetische Feldenergie ergibt:

$$(46) \quad W = \frac{\pi \cdot n^2 \cdot l}{\sigma} \cdot G,$$

$$(47) \quad G = \frac{kR}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\gamma}{2\mu_0} + 0,331 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right) |H_a| + 0,789 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^2 |H_a|^2 + \dots \right).$$

Unter $|H_a|$ versteht man die Amplitude des Magnetfeldes an der Drahtoberfläche.

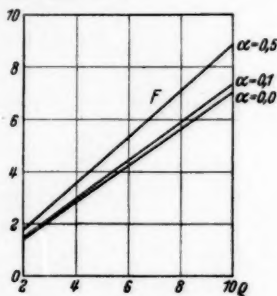


Fig. 5. Die erzeugte Joulesche Wärme

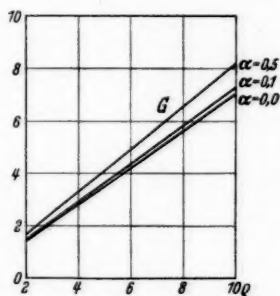


Fig. 6. Die erzeugte magnetische Feldenergie

In Fig. 5 ist die dissipierte Wärme im Kern und in Fig. 6 ist die Kernreaktanz für $q_0 = 2$ bis $q_0 = 10$ in Abhängigkeit von $\alpha = \frac{\varepsilon}{\mu_0}$ dargestellt.

Bezeichnet man

$$(48) \quad \begin{cases} \sqrt{\mu_R} = \sqrt{\mu_0} \left[1 + \frac{\gamma}{2\mu_0} + 0,503 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right) \cdot |H_a| + 0,182 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^2 \cdot |H_a|^2 + \dots \right] \\ \sqrt{\mu_L} = \sqrt{\mu_0} \left[1 - \frac{\gamma}{2\mu_0} + 0,331 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right) \cdot |H_a| + 0,789 \left(\frac{\varepsilon}{\mu_0} \right)^2 \cdot |H_a|^2 + \dots \right], \end{cases}$$

wobei man unter μ_R die wirksame Permeabilität der entwickelten Wärme und unter μ_L die der Selbstinduktion versteht, so läßt sich ein Näherungsausdruck linear in ε für die wirksame Permeabilität μ ableiten, wenn $\frac{\varepsilon}{\mu_0} \cdot |H_a| \ll 1$ ist.

$$(49) \quad \begin{cases} \mu_R = \mu_0 + \gamma + 1,006 \cdot \varepsilon \cdot |H_a| \\ \mu_L = \mu_0 - \gamma + 0,662 \cdot \varepsilon \cdot |H_a|, \end{cases}$$

$$(50) \quad \mu_R - \mu_L = 2\gamma + 0,344 \cdot \varepsilon \cdot |H_a|.$$

Es ergibt sich also derselbe charakteristische Wert mit denselben Zahlenfaktoren wie bei R. Becker als Folge des Ansatzes für die Änderung der Permeabilität.

C. Magnetischer Skineffekt bei starken Wechselfeldern

Während der bisherige Ansatz für schwache Felder eine Ermittlung der Größen γ , ε , somit der Kennwerte der Hysteresisschleife, gestattet, soll jetzt der Fall starker Felder, welcher formal zum Teil in der bisherigen Rechnung erfaßt worden ist, nach dem summarischen Ansatz von Arkadiew berechnet werden. W. Arkadiew hat eine Theorie der Ferromagnetika bei hohen Frequenzen gegeben. Durch Einführung der magnetischen Leitfähigkeit ϱ wird der durch die Phasenverschiebung bedingte Energieverlust berücksichtigt.

Es wird gesetzt:

$$(51) \quad \mu' = \mu - j \cdot \frac{4\pi\varrho}{\omega} = \mu - j\varrho' = \mu(1 - jb).$$

Der Phasenwinkel φ zwischen B und H bestimmt sich aus der Gleichung:

$$(52) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho'}{\mu} = b.$$

Die Induktion B ist jetzt eine komplexe Größe, B wird ein Ausdruck von der Gestalt:

$$(53) \quad B = \mu' H = (\mu - j \cdot \varrho') \cdot H.$$

Im Gegensatz zur bisherigen Rechnung ist über die Feldabhängigkeit von ϱ' nichts angenommen, sondern man rechnet mit einem konstanten Mittelwert. Insofern ist diese Rechnung viel gröber. Mittelstraß¹⁾ hat rechnerisch und experimentell bei Untersuchungen über den elektrischen Skineffekt die Zweckmäßigkeit der Arkadiewschen Theorie geprüft.

Die Besselsche Differentialgleichung läßt sich in diesem Fall streng integrieren.

Die Differentialgleichung (4) lautet für komplexe Permeabilität:

$$(54) \quad \frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} - 4 \cdot \pi \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \bar{\mu} \cdot (j + b) \cdot H = 0$$

und dieselbe liefert die Lösung:

$$(55) \quad \begin{cases} H = A \cdot J_0 \cdot (k \cdot \sqrt{-(j+b)}), \\ k = \sqrt{4\pi\omega\sigma \cdot \bar{\mu} \cdot a}. \end{cases}$$

Die Konstante A bestimmt sich aus der Bedingung, daß die Tangentialkomponente der Feldstärke eine Grenzfläche zweier Medien stetig durchsetzt. Für $r = a$ wird:

1) K. A. Mittelstraß, Arch. f. Elektrotechn. 18. S. 595. 1927.

$$(56) \quad \begin{cases} 0,4 \cdot \pi \cdot n \cdot i = A \cdot J_0 (\sqrt{4 \pi \omega \sigma \bar{\mu}} a \cdot \sqrt{-(j+b)}) \\ \sqrt{4 \pi \omega \sigma \bar{\mu}} = k' \\ A = \frac{0,4 \cdot \pi \cdot n \cdot i}{J_0 (k' \cdot \sqrt{-(j+b)})} \end{cases}$$

Der erzeugte Induktionsfluß ergibt:

$$(57) \quad \begin{cases} \Phi = 2 \pi \bar{\mu} \cdot (1-jb) \int_0^r A \cdot J_0 (k' \cdot r \cdot \sqrt{-(j+b)}) r dr \\ \Phi = 2 \pi A r \frac{\bar{\mu} \cdot (1-jb)}{k' \cdot \sqrt{-(j+b)}} \cdot J_1 (k' \cdot r \cdot \sqrt{-(j+b)}). \end{cases}$$

Die Berechnung der Jouleschen Wärme liefert:

$$(58) \quad \begin{cases} Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \cdot F \\ F = \operatorname{Re} \left[\frac{z \cdot J_1(z)}{J_0(z)} \right] \end{cases}$$

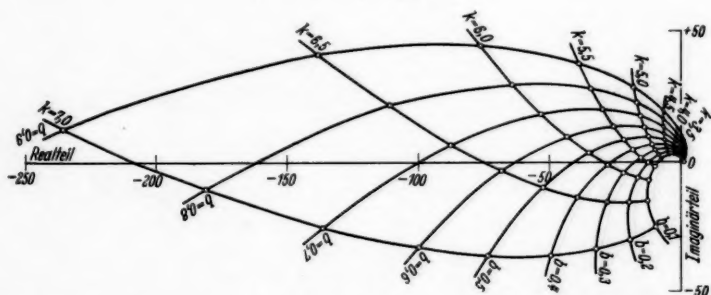


Fig. 7. Die magnetische Feldstärke in der komplexen Ebene dargestellt

und für die magnetische Feldenergie erhält man:

$$(59) \quad \begin{cases} W = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2}{\sigma} \cdot G \\ G = \operatorname{Im} \left[\frac{z \cdot J_1(z)}{J_0(z)} \right], \end{cases}$$

wobei

$$z = k \sqrt{-(j+b)}.$$

Die Berechnung der einzelnen Funktionen:¹⁾ Die magnetische Feldstärke ist durch $J_0(z)$ für

$$z = k \cdot \sqrt{-(j+b)}$$

bestimmt.

1) Vgl. Jahnke-Emde, S. 90/100.

Eine Reihe von Funktionen ist von Mittelstraß berechnet worden. Diese Berechnung wurde noch durch einige weitere Kurven vervollständigt (vgl. Fig. 7).

Der Induktionsfluß ist durch die Besselsche Funktion 1. Ordnung bestimmt (vgl. Figg. 8 u. 9).

$$(60) \quad \left\{ \begin{aligned} z \cdot J_1(z) &= \frac{z^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{z^6}{2 \cdot 4^3 \cdot 6^2 \cdot 8} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^8}{2 \cdot 4^4 \cdot 6^3 \cdot 8^2 \cdot 10} - \dots \right), \end{aligned} \right.$$

für $z = k \cdot \sqrt{-(j+b)}$ geht $z \cdot J_1(z)$ über in:

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} &= -\frac{b \cdot k^2}{2} + \frac{(1-b^2) \cdot k^4}{2^4} + \frac{(3b-b^3) \cdot k^6}{2^6 \cdot 6} - \frac{(1-6b^2+b^4) \cdot k^8}{2^8 \cdot 6^2 \cdot 8} \\ &- \frac{(5b-10b^3+b^5) \cdot k^{10}}{2^{10} \cdot 6^3 \cdot 10} - j \left[\frac{k^2}{2} + \frac{2bk^4}{2^4} - \frac{(1-3b^2) \cdot k^6}{2^6 \cdot 6} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(4b-4b^3) \cdot k^8}{2^8 \cdot 6^2 \cdot 8} + \frac{(1-10b^2+5b^4) \cdot k^{10}}{2^{10} \cdot 6^3 \cdot 10} \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Reihe hat für $k > 2,5$ eine schwache Konvergenz, deshalb führt man semikonvergente Reihen ein.

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} J_1(z) &= \frac{e^{j\left(\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot z}} \cdot \frac{1}{j} \cdot \left(1 + \frac{3j}{8z} + \frac{15}{128z^2} - \frac{105j}{1024z^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4725}{32768z^4} \dots \right), \end{aligned} \right.$$

$z \cdot J_1(z)$ geht mit:

$$z = k \sqrt{-(j+b)} = \varrho \cdot e^{-j \cdot \left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)}$$

über in:

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} &k \cdot \sqrt{-(j+b)} \cdot J_1(k \cdot \sqrt{-(j+b)}) = \frac{e^{\varrho \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi\varrho}} \\ &\cdot (\cos\beta + j \sin\beta) \cdot \left[-\varrho \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8} + \frac{15 \cdot \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)}{128 \cdot \varrho} \right. \\ &+ \frac{105 \sin 2\vartheta}{1024 \varrho^2} - \frac{4725 \cos\left(3\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)}{32768 \cdot \varrho^3} - \dots \left. \right] \\ &- j \cdot \left[\varrho \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{15 \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)}{128 \cdot \varrho} + \frac{105 \cos 2\vartheta}{1024 \cdot \varrho^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4725 \sin\left(3\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)}{32768 \cdot \varrho^3} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

$$\beta = \varrho \cdot \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{8},$$

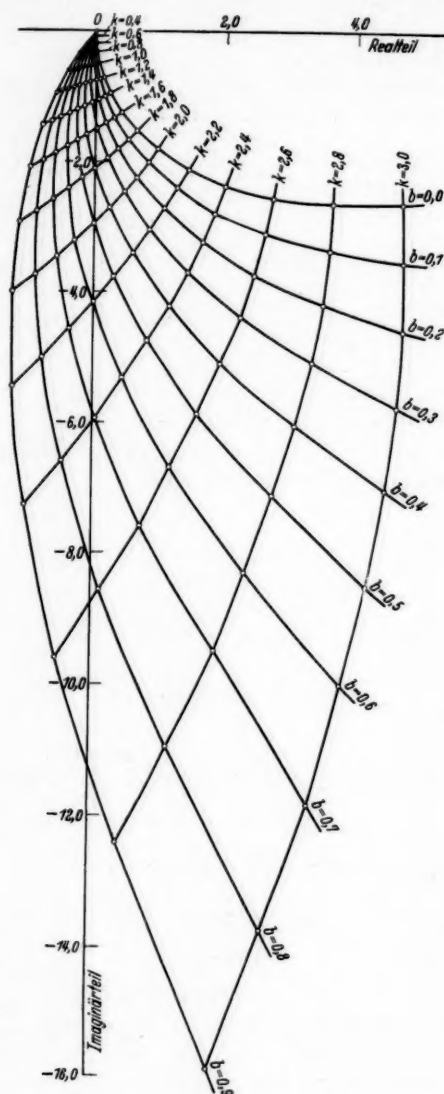


Fig. 8. Der Induktionsfluß in der komplexen Ebene dargestellt

für $b = 0,0$ wird $\varrho = k$ und der Ausdruck geht über in:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} z \cdot J_1(z) &= \frac{e^{\frac{k}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2} \pi k} \left(\cos \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + j \cdot \sin \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right) \\ &+ \left[-\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{3}{8} + \frac{15}{128 k \sqrt{2}} - \frac{4725}{32768 k^3 \sqrt{2}} - \dots \right] \\ &- j \cdot \left[\frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{15}{128 k \sqrt{2}} + \frac{105}{1024 k^3} + \frac{4725}{32768 k^3 \sqrt{2}} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

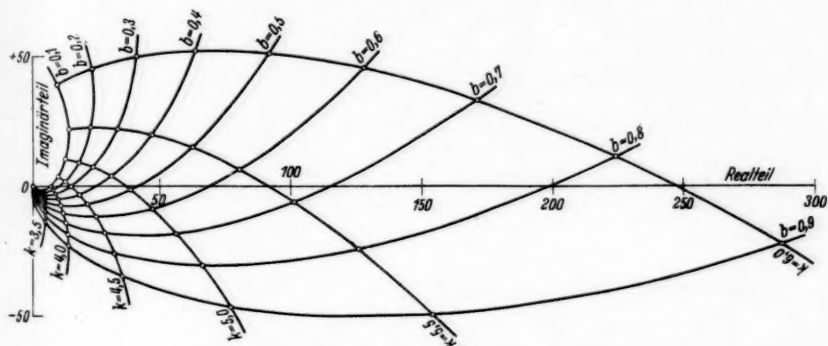


Fig. 9. Der Induktionsfluß in der komplexen Ebene dargestellt

Rechnet man den Ausdruck $\frac{z \cdot J_1(z)}{J_0(z)}$ um, so erhält man:

$$\frac{z \cdot J_1(z)}{J_0(z)} = -j \cdot z + \frac{1}{2} - \frac{j}{8z} - \frac{1}{8z^2} + \frac{25 \cdot j}{128 z^3} + \dots$$

Für

$$z = \varrho \cdot e^{-j \cdot \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}$$

wird:

$$\begin{aligned} \frac{z \cdot J_1(z)}{J_0(z)} &= -\varrho \cdot \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{8 \cdot \varrho} + \frac{\sin 2\vartheta}{8 \cdot \varrho^2} \\ &- \frac{25 \cos \left(3\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{128 \cdot \varrho^3} - \dots \\ &- j \cdot \left[p \cdot \cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{8 \cdot \varrho} + \frac{\cos 2\vartheta}{8 \cdot \varrho^2} \right. \\ &\left. + \frac{25 \sin \left(3\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{128 \cdot \varrho^3} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Der Ausdruck für die Joulesche Wärme geht über in:

$$(65) \quad \left\{ Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \left[\varrho \cdot \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{8 \varrho} - \frac{\sin 2 \vartheta}{8 \varrho^2} + \frac{25 \cos \left(3 \vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{128 \varrho^3} + \dots \right], \right.$$

für $b = 0,0$ und $k = \varrho$

$$(66) \quad Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8k\sqrt{2}} + \frac{25}{128k^2\sqrt{2}} + \dots \right),$$

für sehr große Werte von k geht (47) über in:

$$(67) \quad Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \cdot \left(\varrho \cdot \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \right)$$

wird $b = 0,0$ und $\varrho = k$

$$(68) \quad Q = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \left(\frac{k}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right).$$

Entsprechend erhält man für die magnetische Feldenergie:

$$(69) \quad \left\{ W = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2}{\sigma} \left[\varrho \cdot \cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{8 \cdot \varrho} + \frac{\cos 2 \vartheta}{8 \cdot \varrho^2} + \frac{25 \cdot \sin \left(3 \vartheta + \frac{\pi}{4} \right)}{128 \cdot \varrho^3} - \dots \right]. \right.$$

Für sehr große Werte von k geht (51) über in:

$$(70) \quad W = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2}{\sigma} \cdot \left(\varrho \cdot \cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Wird $b = 0,0$ und $\varrho = k$:

$$(71) \quad W = \frac{\pi \cdot l \cdot n^2}{\sigma} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

Aus den Formeln (65) bis (71) folgt, daß die Ausdrücke für die Joulesche Wärme wie für die magnetische Feldenergie für sehr große k -Werte in Geraden übergehen. Die spezialisierten Ausdrücke (68) und (71) sind jene, die M. O. Strutt in seiner Arbeit abgeleitet hat.

In den Kurvendarstellungen (Figg. 10 und 11) sind die Joulesche Wärme und die magnetische Feldenergie für den Bereich $k = 0,0$ bis $k = 10,0$ in Abhängigkeit von $b = 0,0$ bis $b = 0,8$ dargestellt.

Vernachlässigt man bei der Entwicklung von $\sqrt{-(j+b)}$ die höheren Potenzen von b :

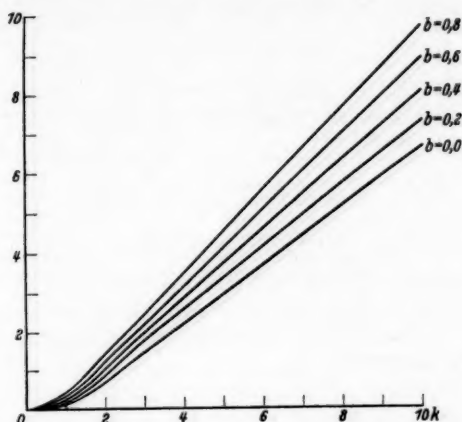


Fig. 10. Kurven für die Joulesche Wärme

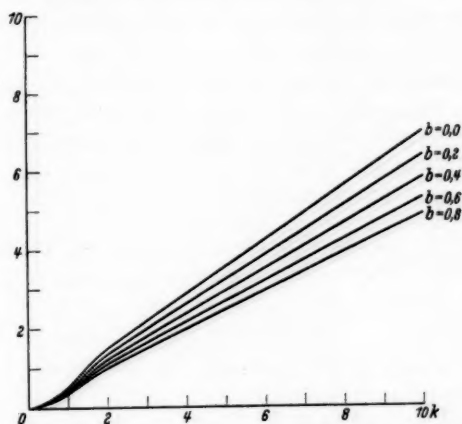


Fig. 11. Kurven für die magnetische Feldenergie

$$\begin{aligned}
 (72) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= k \cdot \sqrt{-(j+b)} = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{1+b^2}-b-j \cdot \sqrt{1+b^2}+b), \\ Q &= \frac{\pi \cdot l \cdot n^2 \cdot i^2}{\sigma} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1+b^2}+b, \\ W &= \frac{\pi \cdot l \cdot n^2}{\sigma} \cdot \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1+b^2}-b, \end{aligned} \right. \\
 (73) \quad \mu_R &= \bar{\mu} + \varrho, \quad \mu_L = \bar{\mu} - \varrho,
 \end{aligned}$$

so erhält man eine lineare Beziehung in ϱ' :

$$(74) \quad \mu_R - \mu_L \approx 2 \cdot \varrho'.$$

Aus (51) folgt, daß man aus der Kenntnis von ϱ' und $\bar{\mu}$ die Größe b berechnen kann. Nach einem Vergleich mit dem Ansatz von Rayleigh-Jordan entspricht:

$$(75) \quad \varrho' = \gamma + 0,172 \cdot \varepsilon \cdot |H_a|.$$

D. Zusammenfassung

1. Es wurden nach dem Ansatz von Rayleigh-Jordan für die Hysteresiskurve sowie nach dem von Arkadiew die Beziehungen für die Joulesche Wärme und magnetische Feldenergie berechnet und graphisch dargestellt.

2. Die Funktion $k \cdot \sqrt{-(j+b)} \cdot J_1(k \cdot \sqrt{-(j+b)})$ wurde von $k = 0,0$ bis $k = 10,0$ für $b = 0,1$ bis $b = 0,9$ tabelliert und von $k = 0,0$ bis $k = 6,0$ graphisch dargestellt.

3. Die Differenz von $\mu_R - \mu_L$ ergibt nach Rayleigh-Jordan in erster Näherung eine lineare Beziehung in ε und nach Arkadiew entsprechend eine für ϱ' .

Die Arbeit wurde im II. Physikalischen Institut der Universität Göttingen ausgeführt. Herrn Prof. Dr. Joos bin ich für die stetige Unterstützung und wertvolle Diskussion zu großem Dank verpflichtet. Herrn Prof. Dr. Reich danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit wie für sein mir entgegengebrachtes Interesse.

Göttingen, II. Physikalisches Institut und Institut für angewandte Elektrizität.

(Eingegangen 1. Oktober 1936)

**Der Zeemaneffekt der Alkalien
nach der Diracgleichung¹⁾**

Von R. Schlatterer

Mit Zeemans Entdeckung der magnetischen Beeinflußbarkeit der Spektrallinien im Jahre 1896 war die Atomphysik schon in ihren ersten Anfängen vor ein Problem gestellt, das ihre ganze weitere Entwicklung begleiten sollte. Zwar konnte die Lorentzsche Elektronentheorie sogleich eine Erklärung des Phänomens in seinen wesentlichsten Zügen geben, aber die späteren Beobachtungen über die Anomalien des Effekts und die an die Namen Paschen und Back geknüpften Erscheinungen in sehr starken Magnetfeldern gaben der Theorie immer neue Rätsel auf.

Auch die Quantentheorie vermochte zunächst nur den „normalen“ Fall zu erklären. In der Deutung der anomalen Effekte kam ihr die Voigt-Sommerfeldsche Theorie zuvor, die im Grunde eine Vertiefung der ursprünglichen Lorentzschen Ideen war. Die Reichweite der Voigtschen Vorstellung erstreckte sich auf die richtige Berechnung der Frequenzen wie auch der Intensitäten im Falle des *D*-Linientypus für beliebige Feldstärken. Uns sind so erstaunliche Erfolge heute kaum mehr verständlich, da wir doch an das Problem des anomalen Zeemaneffekts ohne die Kenntnis des Elektronenspins gar nicht mehr herantreten können.

Die neuen Formen der Quantentheorie als Quanten- oder Wellenmechanik konnten ursprünglich von den Anomalien ebensowenig Rechenschaft geben. Hierzu mußten immer erst irgendwelche Spinmodelle zusätzlich eingeführt werden. Solche Modelle lagen den quantenmechanischen Berechnungen des Zeemaneffekts von Heisenberg und Jordan²⁾ wie auch den ersten wellenmechanischen von Darwin³⁾ zugrunde.

Heute ist die von Dirac aufgefundene Wellengleichung des Elektrons der natürliche Ausgangspunkt für alle wellenmechanischen Berechnungen, in denen der Spin eine entscheidende Rolle spielt. Im Vergleich mit den spektroskopischen Tatsachen zeigt sich die

1) Inauguraldissertation Universität München.

2) W. Heisenberg u. P. Jordan, *Ztschr. f. Phys.* 37. S. 270. 1926.

3) C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. A* 115. S. 1. 1927.

Überlegenheit der Diracgleichung gegenüber den älteren Ansätzen darin, daß sie die äußerst genau nachprüfbare Feinstrukturformel Sommerfelds in ihrer exakten Form liefert. Daß sie auch den Zeemaneffekt der Dublettsysteme in allen Einzelheiten richtig wiedergibt, hat als erster Darwin¹⁾ gezeigt.

Die vorliegende Arbeit will ebenfalls eine Ableitung der Feinstruktur und des Zeemaneffekts aus der Diracgleichung geben, und zwar für deren genauen Gültigkeitsbereich: bei Atomen mit einem äußeren Elektron. Als Ausgangspunkt ist dabei nicht die lineare, sondern die iterierte Diracgleichung gewählt, von der Sommerfeld und Maue²⁾ gezeigt haben, daß sich ihre Lösung im Falle eines beliebigen stationären elektrischen Feldes an die der Schrödingergleichung anschließen läßt. Die Methode ist ein Näherungsverfahren und stellt sich als eine Entwicklung sowohl der Eigenfunktion als auch der Eigenwerte nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten α dar. Dieser Näherungsansatz darf wohl für die Behandlung der Spektren als der der Natur der Sache am besten angemessene betrachtet werden. Gegenüber der Paulischen Näherung, die eine Entwicklung für kleine Werte von $\beta = \frac{v}{c}$ ist, ist der Unterschied analytisch durch das Auftreten der Biquaternionen an Stelle des Quaternionenkörpers gegeben.

Im Gegensatz zu den bisherigen Berechnungen³⁾ des Zeemaneffekts nach Dirac, die die magnetische Störung an die exakte Lösung der Diracgleichung ohne Magnetfeld anschließen, werden wir die Feinstruktur- und die magnetische Aufspaltung gleichzeitig als Störungen behandeln. Dies ist konsequent, da ja die beiden Effekte tatsächlich von derselben Größenordnung sind. Es wird sich zeigen, daß in unserem Falle das Vorhandensein eines Magnetfeldes kaum eine Komplikation der Rechnungen bedingt.

§ 1. Erläuterung des Näherungsansatzes und Integration der ersten Näherung

Das Leuchtelektron bewegt sich in einem zentralsymmetrischen elektrischen Feld mit dem Potential $V = V(r)$, dem ein homogenes Magnetfeld $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_z$ mit dem Vektorpotential

$$(1,1) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{2} H \cdot (-y, x, 0)$$

1) C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. A 118. S. 676. 1928.

2) A. Sommerfeld u. A. W. Maue, Ann. d. Phys. [5] 22. S. 629. 1935. (Im folgenden mit a. a. O. zitiert.)

3) Vgl. außer C. G. Darwin (a. a. O.) etwa L. de Broglie „L'électron magnétique“ S. 258 u. F. Sauter, Ztschr. f. Phys. 63. S. 811. 1930.

überlagert ist. Wir gehen aus von der iterierten Diracgleichung des Problems

$$(1,2) \quad \begin{cases} \Delta \psi + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [(E' - V)^2 - e^2 \mathfrak{A}^2 - E_0^2] \psi \\ = \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V) \psi + 2 \frac{ie}{\hbar c} (\mathfrak{A} \text{ grad } \psi) + \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \vec{\gamma} \mathfrak{H}) \psi. \end{cases}$$

Mit $\vec{\gamma}$ und $\vec{\gamma}\vec{\gamma}$ bezeichnen wir die Vektoren

$$\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3); \quad \vec{\gamma}\vec{\gamma} = (\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})$$

wobei noch $\gamma_k \gamma_l = \gamma_{kl}$ gesetzt ist.

In der Gleichung (1,2) sehen wir die mit γ behafteten „Spinglieder“ und ebenso die vom Magnetfeld abhängigen Terme als kleine Störungen an. Die ungestörte Gleichung ist eine Schrödingergleichung (mit etwas veränderter Bedeutung des Energieparameters, vgl. a. a. O. S. 630) und hat als Lösung die bekannten Schrödingerschen Eigenfunktionen für ein elektrisches Zentralfeld.

Um aus der Schrödingerschen Lösung als nullter Näherung eine angenäherte Lösung von (1,2) zu gewinnen, setzen wir für die Eigenfunktionen ψ und ebenso die Eigenwerte E' Reihenentwicklungen an

$$(1,3) \quad \psi = \psi_0 + \psi_1 + \psi_2 + \dots; \quad E' = E + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots,$$

die nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten α fortschreiten. Es soll also ψ_n von der Größenordnung $\alpha^n \psi_0$ und ϵ_n von der Ordnung $\alpha^n E$ sein. In der Gleichung (1,2) selbst betrachten wir als klein von

$$1. \text{ Ordnung in } \alpha \text{ das Glied: } \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V),$$

$$2. \text{ Ordnung die Glieder: } \frac{1}{\hbar^2 c^2} V^2; \quad 2 \frac{ie}{\hbar c} (\mathfrak{A} \text{ grad}); \quad \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \vec{\gamma} \mathfrak{H}).$$

Daß wir den vom Magnetfeld linear abhängigen Gliedern die Größenordnung α^2 zuschreiben, ist für den Feldstärkenbereich des anomalen Zeemaneffekts deshalb gerechtfertigt, weil hier die magnetische Energiestörung von der Größe der Feinstrukturaufspaltung ist, welche ihrerseits gegenüber der Rydbergenergie als nullter Näherung von der Ordnung α^2 ist. Letzteres ist im Falle des Wasserstoffs von vornherein aus der Sommerfeldschen Feinstrukturformel zu entnehmen und der Größenordnung nach gilt das gleiche auch für die Alkalien. Das Glied $e^2 \mathfrak{A}^2 / \hbar^2 c^2$ wäre konsequenterweise als klein von vierter Ordnung anzusehen und bleibt daher für uns ganz außer Betracht.

Aus den Ansätzen (1,3) erhält man durch Einsetzen in (1,2) und Zusammenfassung aller Glieder von gleicher Größenordnung die Gleichungen, denen die aufeinanderfolgenden Näherungen genügen müssen. Für ψ_0 ist es die (homogene) Schrödingergleichung:

$$(1,4) \quad D \psi_0 = \Delta \psi_0 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} (E^2 - 2 E V - E_0^2) \psi_0 = 0.$$

Ihre Eigenwerte und Eigenlösungen dürfen wir als bekannt annehmen. Im allgemeinen Fall, wenn E entartet und ein p -facher Eigenwert ist, gibt es dazu p linear unabhängige Eigenfunktionen, die wir durch einen oberen Index μ unterscheiden:

$$(1,5) \quad D \psi^\mu = 0 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots, p.$$

Wir wollen voraussetzen, daß diese ψ^μ gemäß der Gleichung

$$(1,6) \quad \int \bar{\psi}^\mu (E - V) \psi^\mu d\tau = E_0 \delta_{\mu m}$$

orthogonalisiert und normiert seien. Überstreichen möge immer den Vorzeichenwechsel der imaginären Einheit andeuten. Die hier gewählte Form der Orthogonalitätsbedingung ist daraus zu verstehen, daß der Eigenwertparameter E in (1,4) quadratisch vorkommt (vgl. hierzu die analoge Orthog. Bed. a. a. O. Gl. (14) für $\varepsilon = E$).

Die allgemeinste zum Eigenwert E gehörige Lösung von (1,4) ist gegeben durch eine Linearkombination

$$(1,7) \quad \psi_0 = \sum_{\mu=1}^p a_\mu \psi^\mu$$

mit konstanten Koeffizienten a_μ .

Die erste Näherung ψ_1 unseres Problems muß die inhomogene Schrödingergleichung

$$(1,8) \quad D \psi_1 = \left[\frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V) - 2 \frac{E - V}{\hbar^2 c^2} \varepsilon_1 \right] \sum_{\mu} a_\mu \psi^\mu$$

erfüllen. Die Konstanten ε_1 und a_μ sind nach den allgemeinen Vorschriften der Schrödingerschen Störungstheorie aus der Lösbarkeitsbedingung:

$$(1,9) \quad \int \bar{\psi}^m D \psi_1 d\tau = 0 \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \dots, p$$

zu bestimmen. Es muß also gelten:

$$(1,10) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{\mu} \int \bar{\psi}^m \left[\gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V) - 2 \frac{E - V}{\hbar c} \varepsilon_1 \right] a_\mu \psi^\mu d\tau \\ &= -2 \frac{E_0}{\hbar c} \varepsilon_1 \sum_{\mu} a_\mu \delta_{\mu m} + \gamma_4 \sum_{\mu} \int \bar{\psi}^m (\vec{\gamma} \text{ grad } V) \psi^\mu d\tau a_\mu. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen zeigen, daß das restliche Integral gleich Null ist¹⁾. Nach den Gl. (1,4) und (1,5) ist nämlich

$$0 = \overline{\psi^m} \operatorname{grad} (D \psi^\mu) - \operatorname{grad} \psi^\mu D \overline{\psi^m} \\ = \overline{\psi^m} \Delta \operatorname{grad} \psi^\mu - \operatorname{grad} \psi^\mu \Delta \overline{\psi^m} - \overline{\psi^m} \frac{2E}{\hbar^2 c^2} \operatorname{grad} V \psi^\mu.$$

Integrieren wir diese Gleichung über den unendlichen Raum, so ergeben die beiden ersten Glieder nach dem Greenschen Satz ein Oberflächenintegral, das aber wegen des raschen Abfalls der Eigenfunktionen nach außen verschwindet. Wir erhalten daher:

$$(1,11) \quad 0 = \int \overline{\psi^m} \operatorname{grad} V \psi^\mu d\tau.$$

Damit ergibt sich aber aus (1,10):

$$0 = -\frac{2E_0}{\hbar c} \epsilon_1 a_m \quad \text{für } m = 1, 2, \dots, p.$$

Es folgt, daß notwendig $\epsilon_1 = 0$ sein muß, während die a_m unbestimmt bleiben. Die erste Näherung reduziert sich somit auf die Gleichung:

$$(1,12) \quad D \psi_1 = \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \operatorname{grad} V) \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist a. a. O. [Gl. (22)] angegeben. Wir schreiben sie in der Form²⁾:

$$(1,13) \quad \psi_1 = \frac{\hbar c}{2E} \gamma_4 \left(\vec{\gamma} \operatorname{grad} \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right) + \sum_{\mu} b_{\mu} \psi^{\mu}.$$

1) Wie a. a. O. S. 633, Anm. 1 erläutert ist, haben wir dies als eine wellenmechanische Formulierung des Impulssatzes aufzufassen. In der dort angegebenen Gl. (20) ist wieder $\epsilon = E$ zu setzen.

2) Man kann sich in folgender Weise sehr einfach davon überzeugen, daß (1,13) das allgemeine Integral von (1,12) ist. Aus Gl. (1,4) schließt man:

$$\operatorname{grad} D \psi_0 = D \operatorname{grad} \psi_0 - \frac{2E}{\hbar^2 c^2} \operatorname{grad} V \psi_0 = 0.$$

Durch skalare Multiplikation mit dem Vektor $\frac{\hbar c}{2E} \gamma_4 \vec{\gamma}$ folgt weiter:

$$D \left\{ \frac{\hbar c}{2E} \gamma_4 (\vec{\gamma} \operatorname{grad} \psi_0) \right\} - \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \operatorname{grad} V) \psi_0 = 0.$$

Im Verein mit (1,7) zeigt diese Relation, daß

$$\frac{\hbar c}{2E} \gamma_4 \left(\vec{\gamma} \operatorname{grad} \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right)$$

ein partikuläres Integral der inhomogenen Gl. (1,12) ist. Ihr allgemeines Integral entsteht durch Hinzufügen einer beliebigen Lösung der homogenen Gl. (1,4).

Ich verdanke diesen Hinweis Herrn Dr. Welker.

Dies stellt bei beliebiger Wahl der Koeffizienten b_μ eine Lösung der Gl. (1,12) dar. Auf die nähere Bestimmung der b_μ brauchen wir nicht einzugehen, da sie in den folgenden Rechnungen keine Rolle spielen werden.

§ 2. Das Störungsschema für die zweite Näherung

Da die Energieniveaus in erster Näherung nicht gestört werden, nennen wir jetzt die Energiestörung zweiter Ordnung einfach ϵ statt ϵ_1 . Sie ist zu berechnen aus der 2. Näherung der Gl. (1,2), nämlich:

$$(2,1) \quad \left\{ \begin{aligned} D \psi_2 &= \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V) \psi_1 + 2 \frac{ie}{\hbar c} (\mathcal{A} \text{ grad } \psi_0) \\ &+ \left[-2 \frac{E-V}{\hbar^2 c^2} \epsilon - \frac{V^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{S}}) \right] \psi_0. \end{aligned} \right.$$

In das erste Glied der rechten Seite setzen wir für ψ_1 die Darstellung (1,13) ein und führen in dem so entstehenden Ausdruck die folgende Umformung durch:

$$\begin{aligned} & \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V) \gamma_4 \left(\vec{\gamma} \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right) \\ &= - (\vec{\gamma} \text{ grad } V) \left(\vec{\gamma} \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right) \\ &= - \left(\text{grad } V, \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right) - \left(\vec{\gamma} \vec{\gamma} \left[\text{grad } V, \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right] \right). \end{aligned}$$

Daß hierbei die Größe γ_4 herausgefallen ist, wird uns für die weitere Rechnung von Vorteil sein. Wir können also jetzt $D \psi_2$ ganz durch die Grundlösungen ψ^{μ} ausdrücken:

$$(2,2) \quad \left\{ \begin{aligned} D \psi_2 &= -\frac{1}{2E} \left(\text{grad } V, \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right) \\ &- \frac{1}{2E} \left(\vec{\gamma} \vec{\gamma} \left[\text{grad } V, \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} \right] \right) \\ &+ \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{ grad } V) \sum_{\mu} b_{\mu} \psi^{\mu} + 2 \frac{ie}{\hbar c} (\mathcal{A} \text{ grad } \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu}) \\ &+ \left[-2 \frac{E-V}{\hbar^2 c^2} \epsilon - \frac{V^2}{\hbar^2 c^2} + \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \vec{\gamma} \cdot \vec{\mathcal{S}}) \right] \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu}. \end{aligned} \right.$$

Die Grundlage für die Störungsrechnung bildet wieder die Lösbarkeitsbedingung

$$(2,3) \quad \int \bar{\psi}^m D \psi_2 d\tau = 0,$$

welche für die Werte $m = 1, 2, \dots, p$ erfüllt sein muß. Setzen wir hier die vorangehende Darstellung für $D\psi_2$ ein, so zerfällt (2,3) in eine Summe von Integralen. Einige davon können wir ausführen:

$$(2,4) \quad \int \bar{\psi}^m \left(-2 \frac{E-V}{\hbar^2 c^2} \varepsilon \right) \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} d\tau = -\frac{2E_0}{\hbar^2 c^2} \varepsilon \sum_{\mu} a_{\mu} \delta_{\mu m}.$$

Zufolge der Relation (1,11) ist ferner:

$$(2,5) \quad \int \bar{\psi}^m \frac{1}{\hbar c} \gamma_4 (\vec{\gamma} \text{grad } V) \sum_{\mu} b_{\mu} \psi^{\mu} d\tau = 0.$$

Da das Magnetfeld \mathfrak{H} konstant ist, wird auch der Wert des Integrals

$$\int \bar{\psi}^m \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \gamma \mathfrak{H}) \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} d\tau = \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \gamma \mathfrak{H}) \sum_{\mu} a_{\mu} \int \bar{\psi}^m \psi^{\mu} d\tau$$

durch die Gl. (1,6) geliefert. Es ist nämlich bis auf Glieder von der Ordnung $\alpha^2 E_0$

$$E - V = E_0,$$

da sowohl $E - E_0$ als auch V von der Ordnung der Rydbergenergie ($\approx \alpha^2 E_0$) sind. Daher wird mit einer korrekten Vernachlässigung

$$E_0 \delta_{\mu m} = \int \bar{\psi}^m (E - V) \psi^{\mu} d\tau = E_0 \int \bar{\psi}^m \psi^{\mu} d\tau$$

und infolgedessen

$$(2,6) \quad \int \bar{\psi}^m \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \gamma \mathfrak{H}) \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} d\tau = \frac{ie}{\hbar c} (\vec{\gamma} \gamma \mathfrak{H}) \sum_{\mu} a_{\mu} \delta_{\mu m}.$$

Wir führen nun noch die Abkürzungen ein:

$$(2,7) \quad \left\{ \begin{aligned} B_{\mu m} &= \varepsilon \delta_{\mu m} + \frac{1}{2E_0} \int \bar{\psi}^m V^2 \psi^{\mu} d\tau - 2ie \frac{\hbar c}{2E_0} \int \bar{\psi}^m (\mathfrak{A} \text{grad } \psi^{\mu}) d\tau \\ &+ \left(\frac{\hbar c}{2E_0} \right)^2 \int \bar{\psi}^m (\text{grad } V, \text{grad } \psi^{\mu}) d\tau. \end{aligned} \right.$$

$$(2,8) \quad \mathfrak{R}_{\mu m} = \left(\frac{\hbar c}{2E_0} \right)^2 \int \bar{\psi}^m [\text{grad } V, \text{grad } \psi^{\mu}] d\tau.$$

$\mathfrak{R}_{\mu m}$ ist ein räumlicher Vektor, dessen rechtwinklige Komponenten $X_{\mu m}$, $Y_{\mu m}$, $Z_{\mu m}$ wir uns den entsprechenden Komponenten des unter dem Integralzeichen stehenden vektoriellen Produkts zugeordnet denken.

In der nunmehr aus der Lösbarkeitsbedingung (2,3) entstehenden Gleichung

$$(2,9) \quad \sum_{\mu} \left\{ B_{\mu m} + (\vec{\gamma} \gamma, \mathfrak{R}_{\mu m} - ie \frac{\hbar c}{2E_0} \mathfrak{H} \delta_{\mu m}) \right\} a_{\mu} = 0$$

sind die vorangehenden Vereinfachungen alle zusammengefaßt.

Für die Auflösung dieses Gleichungssystems ist es offenbar nötig, hyperkomplexe Werte der Unbekannten a_μ zuzulassen. Natürlich ist es wünschenswert, von vornherein einen möglichst einfachen Ansatz zugrunde zu legen. Wir bemerken daher, daß in (2,9) explizit nur Zahlen der Form

$$(2,10) \quad \Gamma = q + (\vec{\gamma}, q)$$

auftreten, wo q und q komplexe Größen sind. Diese Zahlen bilden einen Körper (nämlich den der Quaternionengruppe). Es genügt deshalb sicher, die a_μ ebenfalls als Zahlen dieses Körpers anzusetzen. Man wird sich aber weiter den Umstand zunutze machen, daß der Zahlkörper (2,10) noch Nullteiler¹⁾ enthält, mit deren Hilfe man durch rechtsseitige Multiplikation die Zahl der unabhängigen Parameter von vier auf zwei reduzieren kann. Ein solcher Nullteiler ist z. B. $1 + i\gamma_{12}$. Wir machen also für a_μ den Ansatz:

$$\begin{aligned} a_\mu &= (q + q_1 \gamma_{23} + q_2 \gamma_{31} + q_3 \gamma_{12})(1 + i\gamma_{12}) \\ &= [(q - iq_3) + i\gamma_{23}(-iq_1 - q_2)](1 + i\gamma_{12}) \\ &= (x_\mu + i\gamma_{23} y_\mu)(1 + i\gamma_{12}). \end{aligned}$$

Man gewinnt hierzu leicht die Multiplikationsregeln

$$\begin{aligned} \gamma_{23} a_\mu &= (-iy_\mu + \gamma_{23} x_\mu)(1 + i\gamma_{12}), \\ \gamma_{31} a_\mu &= (y_\mu - i\gamma_{23} x_\mu)(1 + i\gamma_{12}), \\ \gamma_{12} a_\mu &= (-ix_\mu - \gamma_{23} y_\mu)(1 + i\gamma_{12}). \end{aligned}$$

Indem wir den Ansatz für a_μ in (2,9) eintragen und die vorstehenden Rechenregeln benutzen, bekommen wir die Gleichungen:

$$(2,11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_\mu \left\{ [B_{\mu m} x_\mu - iX_{\mu m} y_\mu + Y_{\mu m} y_\mu - iZ_{\mu m} x_\mu \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hbar c}{2E_0} e H \delta_{\mu m} x_\mu] \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{23} [B_{\mu m} i y_\mu + X_{\mu m} x_\mu - iY_{\mu m} x_\mu - Z_{\mu m} y_\mu \right. \\ &\quad \left. + i\frac{\hbar c}{2E_0} e H \delta_{\mu m} y_\mu] (1 + i\gamma_{12}) \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich mit komplexen Werten von x_μ , y_μ erfüllen, wenn wir setzen:

$$(2,12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_\mu \left[(B_{\mu m} - iZ_{\mu m} - \frac{\hbar c}{2E_0} e H \delta_{\mu m}) x_\mu - i(X_{\mu m} + iY_{\mu m}) y_\mu \right] = 0, \\ &\sum_\mu \left[-i(X_{\mu m} - iY_{\mu m}) x_\mu + (B_{\mu m} + iZ_{\mu m} + \frac{\hbar c}{2E_0} e H \delta_{\mu m}) y_\mu \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. hierzu etwa W. Franz, „Zur Methodik der Diracgleichung“, Sitz.-Ber. d. Bayr. Akad. d. Wiss. (1935).

Damit haben wir für die $2p$ Unbekannten x_μ , y_μ ein System von $2p$ linearen homogenen Gleichungen gefunden. Die Lösbarkeitsbedingung des Systems, nämlich das Verschwinden seiner Determinante, wird uns in bekannter Weise die Energiestörung ε liefern.

§ 3. Berechnung der Term aufspaltungen

Für die wirkliche Berechnung der Energiestörungen ε aus dem Gleichungssystem (2,12) ist es nötig, auf die darin vorkommenden Größen $B_{\mu m}$, $X_{\mu m}$, $Y_{\mu m}$, $Z_{\mu m}$ etwas näher einzugehen.

Die Eigenfunktionen nullter Näherung sind nach Schrödinger (in Polarkoordinaten)

$$(3,1) \quad \psi^\mu = \frac{1}{N_{l\mu}} R_{n l}(\rho) P_l^\mu(\cos \vartheta) e^{i\mu\varphi}.$$

Sie erfüllen die Orthogonalitätsbedingung (1,6) nicht exakt, aber wegen der schon benützten Beziehung $E - V \approx E_0$ mit der hier erforderlichen Annäherung. Als Definition der Kugelfunktionen wollen wir die von Darwin eingeführte

$$(3,2) \quad P_l^\mu(u) = (l - \mu)! (1 - u^2)^{\mu/2} \left(\frac{d}{du} \right)^{l+\mu} \frac{(u^2 - 1)^l}{2^l l!}$$

zugrunde legen. Sie führt auf das Normierungsintegral

$$(3,3) \quad \int_0^\pi [P_l^\mu(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} N_{l\mu}^2 = \frac{2}{2l+1} (l + \mu)! (l - \mu)!$$

Außerdem nehmen wir an, daß

$$(3,4) \quad \int_0^\infty R_{n l}^2(\rho) \rho^2 d\rho = 1$$

ist, so daß also auch die Normierung der Funktionen (3,1) mit (1,6) übereinstimmt.

Die Entartung liegt in den $2l + 1$ verschiedenen Werten der magnetischen Quantenzahl

$$(3,5) \quad \mu = -l, \dots, +l,$$

die zu einem bestimmten Energieniveau $E = E_{n l}$ gehören. Wir denken dabei speziell an die Verhältnisse zu den Alkaliatomen. Der Fall des Wasserstoffatoms, wo sich die Entartung auch auf die azimutale Quantenzahl l ausdehnt, würde eigentlich im folgenden etwas umständlichere Überlegungen nötig machen. Deren Durchführung hätte aber keinerlei Besonderheiten zur Folge. Im Ergebnis haben wir vom Standpunkt unserer Rechnung das Wasserstoffatom als ein Atom des Alkalitypus aufzufassen, bei dem lediglich gewisse Energieniveaus zusammenfallen. Auch im Magnetfelde

spielt die Entartung in l keine Rolle, während die μ -Entartung von entscheidendem Einfluß ist.

In den in (2,7) und (2,8) eingeführten Größen lassen sich nun die Integrationen wenigstens für die Winkelanteile alle ausführen. Da die Orthogonalität der ψ^μ von der besonderen Form der Radialteile R_{nl} nicht abhängt, erhalten wir:

$$(3,6) \quad \int \overline{\psi^m} V^2 \psi^\mu d\tau = \delta_{\mu m} \int_0^\infty R_{nl}^2 V^2 r^2 dr.$$

$$(3,7) \quad \int \overline{\psi^m} (\mathfrak{M} \text{ grad } \psi^\mu) d\tau = \int \overline{\psi^m} \frac{1}{2} i \mu H \psi^\mu d\tau = \frac{1}{2} i \mu H \delta_{\mu m}.$$

$$(3,8) \quad \begin{cases} \int \overline{\psi^m} (\text{grad } V, \text{ grad } \psi^\mu) d\tau = \int \overline{\psi^m} \frac{dV}{dr} \frac{\partial \psi^\mu}{\partial r} d\tau \\ = \delta_{\mu m} \int_0^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dR_{nl}}{dr} R_{nl} r^2 dr. \end{cases}$$

Demnach wird:

$$(3,9) \quad B_{\mu m} = \left(\varepsilon + A + m \frac{\hbar c}{2 E_0} e H \right) \delta_{\mu m},$$

wobei A nur noch von den Quantenzahlen n und l abhängt:

$$(3,10) \quad A = \frac{1}{2 E_0} \int_0^\infty V^2 R_{nl}^2 r^2 dr + \left(\frac{\hbar c}{2 E_0} \right)^2 \int \frac{dV}{dr} \frac{dR_{nl}}{dr} R_{nl} r^2 dr.$$

Das in dem Integral (2,8) vorkommende Vektorprodukt hat in Polarkoordinaten die Komponenten

$$[\text{grad } V, \text{ grad } \psi^\mu]_r = 0, \quad [\]_\vartheta = - \frac{dV}{dr} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \varphi},$$

$$[\]_\varphi = \frac{dV}{dr} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \vartheta}.$$

Für die kartesischen Komponenten erhält man daraus:

$$(3,11) \quad \begin{cases} ([]_x \pm i []_y) = ([]_r \sin \vartheta + []_\vartheta \cos \vartheta \pm i []_\varphi) e^{\pm i \varphi} \\ = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \left(-\cotg \vartheta \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \varphi} \pm i \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \vartheta} \right) e^{\pm i \varphi}. \end{cases}$$

$$(3,12) \quad []_z = []_r \cos \vartheta - []_\vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \frac{\partial \psi^\mu}{\partial \varphi}.$$

Setzt man dies in (2,8) ein, so ergibt sich für die z -Komponente von $\mathfrak{R}_{\mu m}$:

$$(3,13) \quad \begin{cases} Z_{\mu m} = \left(\frac{\hbar c}{2 E_0} \right)^2 \int \overline{\psi^m} []_z d\tau = \left(\frac{\hbar c}{2 E_0} \right)^2 \int \overline{\psi^m} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} i \mu \psi^\mu d\tau \\ = i m Q \delta_{\mu m}, \end{cases}$$

wobei

$$(3,14) \quad Q = Q_{nl} = \left(\frac{\hbar c}{2 E_0} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dV}{dr} R_{nl}^2 r dr$$

gesetzt ist. Entsprechend berechnen wir für die x - und y -Komponente

$$(3,15) \quad \left\{ \begin{aligned} X_{\mu m} \pm i Y_{\mu m} &= \left(\frac{\hbar c}{2 E_0} \right)^2 \int \overline{\psi^m} ([\]_x \pm i [\]_y) d\tau \\ &= \frac{i Q}{N_{lm} N_{l\mu}} \int \int P_l^m \left(-\mu \cotg \vartheta P_l^\mu \pm \frac{d P_l^\mu}{d \vartheta} \right) \\ &\quad \cdot e^{i(\mu-m \pm 1)\varphi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= -\frac{2\pi i Q}{N_{lm} N_{l\mu}} \delta_{\mu, m \mp 1} \int_0^\pi P_l^m \left(\mu \cotg \vartheta P_l^\mu \mp \frac{d P_l^\mu}{d \vartheta} \right) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Aus der Definitionsgleichung (3,2) gewinnt man durch Differentiation nach ϑ die Beziehungen:

$$(3,16) \quad -\mu \cotg \vartheta P_l^\mu \pm \frac{d P_l^\mu}{d \vartheta} = -(l \mp \mu) P_l^{\mu \pm 1},$$

mit deren Hilfe man auch das in (3,15) noch verbliebene Integral über ϑ auswerten kann:

$$\begin{aligned} X_{\mu m} \pm i Y_{\mu m} &= -\frac{2\pi i Q}{N_{lm} N_{l\mu}} \delta_{\mu, m \mp 1} (l \mp \mu) \int_0^\pi P_l^m P_l^{\mu \pm 1} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= -\frac{2\pi i Q}{N_{lm} N_{l\mu}} \delta_{\mu, m \mp 1} (l \mp \mu) \cdot \frac{1}{2\pi} N_{lm}^2 \\ &= -i Q \delta_{\mu, m \mp 1} (l \mp m + 1) \sqrt{\frac{(l+m)! (l-m)!}{(l+m \mp 1)! (l-m \pm 1)!}}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist also:

$$(3,17) \quad X_{\mu m} + i Y_{\mu m} = -i Q \delta_{\mu, m-1} \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2},$$

$$(3,18) \quad X_{\mu m} - i Y_{\mu m} = -i Q \delta_{\mu, m+1} \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2}.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(3,19) \quad W_m = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - m^2},$$

so wird also:

$$(3,20) \quad X_{\mu m} \pm i Y_{\mu m} = -i Q W_{m \mp \frac{1}{2}} \delta_{\mu, m \mp 1}.$$

Die Beziehungen (9), (13) und (20) dieses Paragraphen führen wir jetzt in das Gleichungssystem (2,12) ein. Nach Ausführung der Summationen erhalten wir:

$$(3,21) \quad \begin{cases} \left[\varepsilon + A + mQ + (m-1) \frac{\hbar c}{2E_0} eH \right] x_m - W_{m-\frac{1}{2}} Q y_{m-1} = 0, \\ -W_{m+\frac{1}{2}} Q x_{m+1} + \left[\varepsilon + A - mQ + (m+1) \frac{\hbar c}{2E_0} eH \right] y_m = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen für alle ganzzahligen Werte m von $-l$ bis $+l$ erfüllt sein. Um die Eigenwerte ε zu finden, für welche das System Lösungen besitzt, betrachten wir zunächst die Spezialfälle $m = \pm l$. Da nach (3,19)

$$W_{-l-\frac{1}{2}} = W_{l+\frac{1}{2}} = 0$$

ist, haben wir die Gleichungen:

$$(3,22) \quad \left[\varepsilon + A - lQ - (l+1) \frac{\hbar c}{2E_0} eH \right] x_{-l} = 0,$$

$$(3,23) \quad \left[\varepsilon + A - lQ + (l+1) \frac{\hbar c}{2E_0} eH \right] y_l = 0.$$

In den übrigen Gleichungen des Systems (3,21) kommen die Unbekannten x_{-l} und y_l nicht mehr vor. Daher gewinnen wir aus den Gl. (3,22) und (3,23) die beiden Eigenwerte

$$(3,24) \quad \varepsilon = -A + lQ \pm (+1) \frac{\hbar c}{2E_0} eH.$$

Sie hängen linear von der Feldstärke H ab und liefern für den s -Term ($l=0$) die Aufspaltung

$$(3,25) \quad \varepsilon_+ - \varepsilon_- = 2 \cdot \frac{\hbar c}{2E_0} eH.$$

Dies ist das Doppelte der normalen Zeemanaufspaltung

$$(3,26) \quad \omega = \frac{\hbar c}{2E_0} eH = \frac{eh}{4\pi m_0 c} H,$$

welche von der Lorentzschen Theorie gefordert wird (ω/\hbar ist die Larmorfrequenz). Wir stoßen hier auf die „Spinanomalie“, wegen deren die einfache normale Zeemanaufspaltung nur bei den Singulettssystemen in Erscheinung treten kann.

In den übrigen Gleichungen des Systems (3,21) ist jetzt $-l+1 \leq m \leq l$ der Wertebereich von m für die erste Zeile und $-l \leq m \leq l-1$ der Wertebereich für die zweite Zeile. Wir beseitigen diese Unsymmetrie und werden zugleich auf den einfachsten Weg zur Eigenwertbestimmung geführt, wenn wir uns die spektroskopische Erfahrung zunutze machen und an Stelle des ganzzahligen m eine halbzahlige Quantenzahl einführen. Dazu ersetzen wir

in der ersten Zeile von (3,21) den Index m durch $m + \frac{1}{2}$, in der zweiten m durch $m - \frac{1}{2}$. Danach hat man

$$(3,27) \quad \begin{cases} \left[\varepsilon + A + \left(m + \frac{1}{2}\right)Q + \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega \right] x_{m+\frac{1}{2}} - W_m Q y_{m-\frac{1}{2}} = 0, \\ -W_m Q x_{m+\frac{1}{2}} + \left[\varepsilon + A - \left(m - \frac{1}{2}\right)Q + \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega \right] y_{m-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

als neues Gleichungssystem, wobei nun in beiden Zeilen der Index m alle halbzahlgigen Werte von $-\left(l - \frac{1}{2}\right)$ bis $+\left(l - \frac{1}{2}\right)$ durchläuft. Man bemerkt, daß die aus (3,27) für verschiedene Werte von m sich ergebenden Paare von Gleichungen keine Unbekannten gemeinsam haben. Daher erhält man auch für jedes m eine besondere Lösbarkeitsbedingung, nämlich die Determinantengleichung:

$$(3,28) \quad \begin{vmatrix} \varepsilon + A + \left(m + \frac{1}{2}\right)Q + \left(m - \frac{1}{2}\right)\omega - W_m Q & \\ -W_m Q & \varepsilon + A - \left(m - \frac{1}{2}\right)Q - \left(m + \frac{1}{2}\right)\omega \end{vmatrix} = 0.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung für ε sind:

$$(3,29) \quad \varepsilon = -A - \frac{1}{2}Q - m\omega \pm \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 Q^2 - mQ\omega + \frac{1}{4}\omega^2}.$$

Dies gilt zunächst für den Wertebereich $|m| \leq l - \frac{1}{2}$. Man sieht aber nachträglich, daß diese Formel auch die Spezialfälle (3,24) umfaßt, wenn man für das positive Vorzeichen der Quadratwurzel noch die Werte $m = \pm \left(l + \frac{1}{2}\right)$ zuläßt. Wir fassen daher das Ergebnis unserer Rechnungen für die Eigenwerte der Energie zusammen in die Formeln:

$$(3,30) \quad \begin{cases} \varepsilon = -A - \frac{1}{2}Q - m\omega + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 Q^2 - mQ\omega + \frac{1}{4}\omega^2} \\ \quad \text{für } |m| \leq l + \frac{1}{2}, \\ \varepsilon = -A - \frac{1}{2}Q - m\omega - \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 Q^2 - mQ\omega + \frac{1}{4}\omega^2} \\ \quad \text{für } |m| \leq l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Feinstruktur der Spektraltermen von Atomen mit einem äußeren Elektron wie auch ihre Veränderungen in starken und schwachen magnetischen Feldern sind hierin enthalten (§ 4). Ferner können wir auf Grund der Gl. (3,27) zu jedem Eigenwert die Koeffizienten x_μ , y_μ und damit nach (2,10) und (1,7) die zugehörigen Eigenfunktionen ψ_0 ermitteln. Deren Kenntnis gestattet uns weiterhin die Berechnung der Auswahlregeln und Intensitäten der Spektrallinien in § 5.

§ 4. Diskussion der bisherigen Ergebnisse

Die Zweiteilung der Gl. (3,30) bringt die Dublettstruktur der Alkalieremission zum Ausdruck. Die erste Zeile liefert im Magnetfeld $2l + 2$ Werte für s . Ihr statistisches Gewicht ist also $2l + 2$, was einer inneren Quantenzahl $j = l + \frac{1}{2}$ entspricht. Die zweite Zeile ergibt nur $2l$ verschiedene Werte für s , entsprechend einer inneren Quantenzahl $j = l - \frac{1}{2}$.

Wenn das äußere Feld verschwindet, haben wir in (3,30) ω gleich Null zu setzen. Es wird dann:

$$(4,1) \quad \begin{cases} s_0 = -A + lQ & \text{für den Term } j = l + \frac{1}{2}, \\ s_0 = -A - (l+1)Q & \text{„ „ „ } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dabei ist aber zu beachten, daß wegen der in (3,30) angegebenen Einschränkungen über den Wertebereich von m die zweite dieser Gleichungen wegzulassen ist, wenn l gleich Null ist. Der s -Term ist daher immer einfach.

Als Dublett Abstand hat man nach (4,1):

$$(4,2) \quad \Delta s_0 = (2l + 1) Q.$$

Die Bedeutung der in (3,14) eingeführten Größe Q ist hierdurch gegeben. Ihre Berechnung würde die Kenntnis des inneren Atomfeldes $V = V(r)$ und der zugehörigen Radialteile $R_{nl}(r)$ der Eigenfunktionen zur Voraussetzung haben. Um jedoch die aus der Spektroskopie bekannten allgemeinen Regelmäßigkeiten¹⁾ zu verstehen, die in der relativen Lage der Dubletts und in der Abhängigkeit ihrer Abstände von den Quantenzahlen n und l hervortreten, haben wir eine solche exakte Kenntnis nicht nötig. Dies ist vielmehr aus einer qualitativen Betrachtung der Darstellung

$$(4,3) \quad Q_{nl} = \left(\frac{\hbar c}{2 E_0} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dV}{dr} R_{nl}^2 r dr$$

unschwer zu entnehmen.

Wir sehen zunächst, daß die Größe Q immer positiv sein wird, da ja das Leuchtelektron überall unter dem Einfluß eines Anziehungspotentials steht und daher dV/dr für alle Werte von r größer als Null sein muß. Nach (4,1) ist also stets

$$(4,4) \quad \varepsilon_{l+\frac{1}{2}} > \varepsilon_{l-\frac{1}{2}}.$$

Der statistisch bevorzugte $\left(l + \frac{1}{2}\right)$ -Term liegt demnach auch energetisch durchweg höher als der $\left(l - \frac{1}{2}\right)$ -Term. Da das statistische Gewicht der Terme für die Intensitäten der zugehörigen Linien und ihre Energie für die Frequenzen der Linien bestimmend sind, findet die Regel (4,4) zwangsläufig ihren Ausdruck in dem regelmäßigen Intensitätswechsel der Dublettserien der Alkalien.

1) Vgl. A. Sommerfeld, „Atombau und Spektrallinien“ I, Kap. 7.

Über den Verlauf des vom Atomrumpf herrührenden Potentials $V(r)$ können wir wenigstens folgende Aussagen mit Sicherheit machen: In der Nähe des Kerns ist dessen Anziehung allein maßgebend und daher

$$V = - \frac{Ze^2}{r}$$

am Kern. Außerhalb der Ladungswolke ist die Kernladung durch die Rumpfelektronen bis auf ein Elementarquantum abgeschirmt, also

$$V = - \frac{e^2}{r}$$

an der Peripherie. Wir fassen beides zusammen in die Formel:

$$(4,5) \quad V = - \zeta \frac{e^2}{r},$$

wobei ζ eine nicht näher bekannte Funktion von r ist, die sich aber für $r \rightarrow 0$ dem Wert Z und für $r \rightarrow \infty$ dem Wert 1 nähert und die für mittlere r jedenfalls innerhalb dieser Grenzen bleibt. An Stelle der Gl. (4,2) können wir somit schreiben:

$$(4,6) \quad \Delta s_0 = (2l + 1) \left(\frac{\hbar c}{2E_0} \right)^2 \int_0^\infty \zeta \frac{e^2}{r} R_{nl}^2 dr.$$

Man sieht, daß wegen des Faktors $1/r$ im Integranden in erster Linie der Verlauf der radialen Eigenfunktionen in Kernnähe für den Wert dieses Integrals maßgebend ist. Da nun die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Leuchtelektrons in der Nähe des Kerns um so geringer wird, je größer n ist, ist es klar, daß mit zunehmender Hauptquantenzahl die Dublett-Abstände kleiner werden müssen. Die durch das Schema

$$(4,7) \quad \begin{array}{c} \nearrow n p_{\frac{3}{2}} \\ 1s \searrow n p_{\frac{1}{2}} \end{array} \quad n p_{\frac{3}{2}} - n p_{\frac{1}{2}} = \text{Dublett-Abstand}$$

charakterisierten Hauptserien der Alkalien spiegeln diese Regel deutlich wieder.

Auch die Abhängigkeit der R_{nl} von der azimutalen Quantenzahl l ist uns in großen Zügen bekannt. Den kleinen Werten von l entsprechen die „Taubbahnen“, d. h. also große Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Kernnähe und somit nach unseren Überlegungen großer Dublett-Abstand. In den Zuständen mit größeren l hingegen bleibt das Elektron an der Peripherie des Atoms: also hat das Integral (4,6) einen kleinen Wert und damit auch der Dublett-Abstand. Spektroskopisch zeigt sich dies darin, daß in der Regel schon in der I. Nebenserie mit dem Linienschema

$$(4,8) \quad \begin{array}{ccc} 2p_{\frac{3}{2}} & \longrightarrow & nd_{\frac{5}{2}} \\ & \searrow & \\ 2p_{\frac{1}{2}} & \longrightarrow & nd_{\frac{3}{2}} \end{array}$$

die d_j -Differenzen ($l = 2$) unmerklich sind gegenüber den p_j -Differenzen ($l = 1$).

Wir wollen nun die Aufspaltungen der Alkaliterme im Magnetfeld auf Grund der Formeln (3,30) untersuchen. Entsprechend der Beziehung (4,2) werden wir zunächst die darin vorkommende Größe Q durch den Dublett-Abstand ersetzen und das Verhältnis

$$(4,9) \quad v = \frac{\Delta s_0}{\omega} = \frac{\text{Dublett-Abstand}}{\text{normale Zeemanaufspaltung}}$$

eingeführen. Wir erhalten:

$$(4,10) \quad s + A + \frac{1}{2} Q = \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{l + \frac{1}{2}} v + v^2} \right) \omega \quad + \text{ für } j = l + \frac{1}{2}, \\ - \text{ für } j = l - \frac{1}{2}.$$

Diese Formel¹⁾ gibt den Zeemaneffekt der Dublettsysteme mit Einfluß der mittleren und starken Magnetfelder (Paschen-Backeffekt) wieder in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Sie wurde für den etwas spezielleren Fall des *D*-Linientypus in dieser geschlossenen Form erstmals von Sommerfeld²⁾ im Anschluß an die Voigtsche Theorie des Zeemaneffekts abgeleitet.

Die Abhängigkeit der Termgröße von der magnetischen Feldstärke ist danach im allgemeinen keine lineare. Vielmehr sind die durch (4,10) gegebenen *s*, *H*-Kurven Hyperbeln. Die Abweichungen vom linearen Verlauf sind jedoch bei den meisten Termen innerhalb beträchtlicher Feldstärkebereiche ziemlich geringfügig. Man kann daher die exakten Formeln vielfach durch übersichtlichere lineare Entwicklungen ersetzen. So erhält man aus (4,10) im Grenzfalle schwacher Felder ($v \gg 1$) durch binomische Entwicklung:

$$(4,11) \quad s - s_0 = - \left(1 \pm \frac{1}{2l+1} \right) m \omega \quad + \text{ für } j = l + \frac{1}{2}, \\ - \text{ für } j = l - \frac{1}{2}.$$

Diese Beziehung ergibt sich als Spezialfall mit $S = \frac{1}{2}$, $L = l$, $J = l \pm \frac{1}{2}$ aus der allgemeinen Landéschen *g*-Formel:

$$s - s_0 = - \left[\frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \right] m \omega,$$

welche zwar auch nur für schwache Felder, dafür aber für beliebige Multiplizitäten gilt.

Ist andererseits das Feld so stark, daß die Feinstrukturabstände klein werden gegenüber der magnetischen Aufspaltung, so werden wir in (4,10) *Q* und *v* vernachlässigen:

$$(4,12) \quad s - s_0 = \left(-m \pm \frac{1}{2} \right) \omega \quad + \text{ für } j = l + \frac{1}{2}, \\ - \text{ für } j = l - \frac{1}{2}.$$

Wir bemerken, daß die für das untere Vorzeichen entstehenden, vom $\left(l - \frac{1}{2} \right)$ -Niveau herrührenden, Terme aufgehen in den vom Niveau $j = l + \frac{1}{2}$ stammenden. Diese starke Vereinfachung des Aufspaltungsbildes bei großen Feldstärken ist für den Paschen-Backeffekt charakteristisch.

Den vereinfachten Formeln (4,11) und (4,12) für die beiden Grenzfälle ist gemeinsam, daß sie die Größe *Q* nicht mehr enthalten und daher auch von der Hauptquantenzahl *n* unabhängig sind. Dies stimmt überein mit der

1) Sie stimmt überein mit der in „Atombau und Spektrallinien“ I S. 532 angegebenen. Das dortige *M* ist unser $-m$, was lediglich eine andere Nummerierung der Terme bedeutet.

2) „Zur Voigtschen Theorie des Zeemaneffektes“, Gött. Nachr. 1914, Gl. (26).

empirisch gefundenen Prestonschen Regel¹⁾, wonach alle Linien einer Serie den gleichen Zeemaneffekt zeigen. Hiermit ist zugleich der Gültigkeitsbereich dieser Regel abgegrenzt.

Die Feinstruktur des Wasserstoffspektrums ist vom Standpunkt der Diracschen Theorie schon so oft behandelt worden, daß wir hier nur kurz anzudeuten brauchen, inwiefern dieser Fall in unseren Rechnungen enthalten ist. Da für ein Coulombfeld auch die Radialteile R_{nl} der Eigenfunktionen ψ^{nl} bekannt sind, können wir hier die Größen A und Q nach den Gl. (3,10) und (3,14) explizit berechnen. Es zeigt sich, daß beim Fehlen eines äußeren Feldes die besondere Form dieser Größen bewirkt, daß gewisse bei den Alkalien getrennte Energieniveaus zusammenfallen. An Stelle der Gl. (4,1) haben wir hier:

$$\text{für die Niveaus mit } j = l + \frac{1}{2}: \varepsilon_0 = -\frac{n}{2(l+1)} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^4 E,$$

$$\text{,, ,, ,, ,, } j = l - \frac{1}{2}: \varepsilon_0 = -\frac{n}{2l} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^4 E.$$

Die Terme der zweiten Zeile sind aber in denen der ersten sämtlich enthalten, da die zweite Gleichung in die erste übergeht, wenn man l durch $l+1$ ersetzt. Demnach fallen beim Wasserstoff alle Niveaus zusammen, die in den Quantenzahlen n und j übereinstimmen: also z. B. $2s$ mit $2p_{\frac{1}{2}}$, $3p_{\frac{3}{2}}$ mit $3d_{\frac{5}{2}}$ usw.

Als korrigierte Gesamtenergie des Wasserstoffatoms findet man, wenn das äußere Feld gleich Null ist:

$$(4,13) \quad E + \varepsilon_0 = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l+1}\right) \left(\frac{\alpha Z}{n}\right)^4\right] E_0.$$

Das ist aber nichts anderes als eine Entwicklung der exakten Sommerfeldschen Feinstrukturformel nach $\alpha Z/n$ bis zu Gliedern von vierter Ordnung.

Im Magnetfelde tritt die Alkalinität des Wasserstoffspektrums klar hervor. Die zufällige Form der Koeffizienten A und Q hat jetzt für die Gl. (3,30) keine Folgen mehr. Die Komponenten der zusammenfallenden Terme, wie z. B. $2s$, $2p_{\frac{1}{2}}$ verhalten sich durchaus selbständig: Der s -Term spaltet in zwei linear vom Feld abhängige Niveaus auf, der $p_{\frac{1}{2}}$ -Term in zwei Terme mit nichtlinearer Abhängigkeit. Ein Unterschied gegenüber den Alkalien liegt nur in dem gemeinsamen Ursprung aller vier Niveaus.

§ 5. Auswahlregeln und Intensitätsformeln

Die Eigenfunktionen nullter Näherung hatten wir in Gl. (1,7) in der Form

$$(5,1) \quad \psi_0 = \sum_{\mu} a_{\mu} \psi^{\mu} = \sum_{\mu} (x_{\mu} + i \gamma_{23} y_{\mu}) (1 + i \gamma_{12}) \psi^{\mu}$$

angesetzt. Die Werte der Koeffizienten x_{μ} , y_{μ} sind (bis auf einen gemeinsamen Faktor) für beliebige Feldstärken aus (3,27) zu entnehmen. Die so bestimmten Funktionen erfüllen jedoch zunächst nur die *iterierte* Diracgleichung. Wir müssen deshalb dafür sorgen, daß unsere Lösung auch die *lineare* Diracgleichung, welche als die eigentliche Wellengleichung des Elektrons anzusehen ist, angenähert erfüllt. Um die Entstehung der iterierten Gl. (1,2) aus der linearen deutlich hervortreten zu lassen, schreiben wir sie in der Form:

1) „Atombau und Spektrallinien“ I, S. 514.

$$(5,2) \quad \left\{ \left(\vec{\gamma}, \text{grad} - \frac{ie}{\hbar c} \mathfrak{A} \right) - \gamma_4 \frac{E - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \left\{ \left(\vec{\gamma}, \text{grad} - \frac{ie}{\hbar c} \mathfrak{A} \right) - \gamma_4 \frac{E - V}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi = 0.$$

Hierbei stellen die geschweiften Klammern die beiden linearen Diracoperatoren dar. Diese Gleichung besagt einestheils, daß ψ eine Lösung der iterierten Gleichung ist, andernteils aber auch, daß

$$(5,3) \quad \psi' = \left\{ \left(\vec{\gamma}, \text{grad} - \frac{ie}{\hbar c} \mathfrak{A} \right) - \gamma_4 \frac{E - V}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi$$

der linearen Gleichung

$$(5,4) \quad \left\{ \left(\vec{\gamma}, \text{grad} - \frac{ie}{\hbar c} \mathfrak{A} \right) - \gamma_4 \frac{E - V}{\hbar c} + \frac{E_0}{\hbar c} \right\} \psi' = 0$$

genügt. Zu einer beliebigen Lösung ψ der iterierten Gleichung erhält man also eine Lösung ψ' der linearen nach der Relation (5,3), wobei nur noch Differentiationen auszuführen sind.

Da wir in unserem Falle nur eine Näherungslösung zur Verfügung haben, dürfen wir uns damit begnügen, den Operator (5,3) durch eine erste Näherung zu ersetzen. Dazu beachten wir, daß die E und E_0 enthaltenden Glieder wegen der Größe der Ruhenergie alles andere überwiegen. Wir schreiben also:

$$(5,5) \quad \left\{ \left(\vec{\gamma}, \text{grad} - \frac{ie}{\hbar c} \mathfrak{A} \right) - \gamma_4 \frac{E - V}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} \right\} = -\gamma_4 \frac{E_0}{\hbar c} - \frac{E_0}{\hbar c} + \dots = -\frac{E_0}{\hbar c} (1 + \gamma_4) + \dots$$

und sehen, daß der Operator bis auf den belanglosen Faktor $-\frac{E_0}{\hbar c}$ angenähert durch den Nullteiler $1 + \gamma_4$ ersetzt werden kann. Die Eigenfunktionen nullter Näherung der linearen Diracgleichung sind danach:

$$(5,6) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_0 &= (1 + \gamma_4) \sum_{\mu} (x_{\mu} + i \gamma_{23} y_{\mu}) (1 + i \gamma_{12}) \psi^{\mu} \\ &= \sum_{\mu} (x_{\mu} + i \gamma_{23} y_{\mu}) \psi^{\mu} \Gamma, \end{aligned} \right.$$

wobei wir

$$(5,7) \quad \Gamma = (1 + i \gamma_{12}) (1 + \gamma_4)$$

setzen. Für die Berechnung der Matricelemente benötigen wir auch die zu (5,6) adjungierte Lösung¹⁾:

$$(5,8) \quad \psi_{\text{adj}} = \Gamma \sum_{\mu} (x_{\mu} + i \gamma_{23} y_{\mu}) \overline{\psi^{\mu}}.$$

In dieser Schreibweise ist davon Gebrauch gemacht, daß die Koeffizienten x_{μ} , y_{μ} sich aus dem Gleichungssystem (3,27) als reelle Größen ergeben.

Mit ψ und ψ' wollen wir die Eigenfunktionen nullter Näherung bezeichnen, die zwei beliebigen Atomzuständen zuzuordnen sind. In Übereinstimmung mit (5,6) setzen wir dabei:

1) Vgl. etwa W. Franz, a. a. O., § 5.

$$(5,9) \quad \begin{cases} \psi = \sum_{\mu} (x_{\mu} + i \gamma_{23} y_{\mu}) \psi^{\mu} I, \\ \Psi = \sum_{\mu} (X_{\mu} + i \gamma_{23} Y_{\mu}) \Psi^{\mu} I. \end{cases}$$

ψ^{μ} und Ψ^{μ} sind nur dann verschieden, wenn sich die beiden Zustände in den Quantenzahlen n oder l unterscheiden. Nach Dirac ist die dem Übergang $\psi \rightarrow \Psi$ entsprechende Übergangsdichte:

$$(5,10) \quad \begin{cases} \psi_{\text{adj}} \gamma_4 \Psi = I \sum_{\mu} (x_{\mu} + i \gamma_{23} y_{\mu}) \overline{\psi^{\mu}} \gamma_4 \sum_{\nu} (X_{\nu} + i \gamma_{23} Y_{\nu}) \Psi^{\nu} I \\ = I \sum_{\mu} \sum_{\nu} [(x_{\mu} X_{\nu} + y_{\mu} Y_{\nu}) + i \gamma_{23} (x_{\mu} Y_{\nu} + y_{\mu} X_{\nu})] \overline{\psi^{\mu}} \Psi^{\nu} I. \end{cases}$$

Wie man auf Grund der Definition (5,7) leicht einsieht, ist

$$I i \gamma_{23} I = 0$$

und daher vereinfacht sich (5,10) zu

$$(5,11) \quad \psi_{\text{adj}} \gamma_4 \Psi = \sum_{\mu} \sum_{\nu} (x_{\mu} X_{\nu} + y_{\mu} Y_{\nu}) \overline{\psi^{\mu}} \Psi^{\nu} \cdot 4 I.$$

Dieser Form der Übergangsdichte entspricht es, daß wir der Koordinate q das Matricelement

$$(5,12) \quad (q) = \int q \sum_{\mu} \sum_{\nu} (x_{\mu} X_{\nu} + y_{\mu} Y_{\nu}) \overline{\psi^{\mu}} \Psi^{\nu} d\tau$$

zuordnen.

Nach dieser Darstellung setzt die Berechnung der Matricelemente und damit der Linienintensitäten die Kenntnis der Funktionen ψ^{μ} , d. h. also die Lösung der Schrödingergleichung des Atoms voraus. Die Koeffizienten $x_{\mu} \dots$ werden durch unsere Störungsrechnung geliefert, und zwar sind, wie das Gleichungssystem (3,27) zeigt, im Magnetfelde jeweils höchsten zwei von ihnen von Null verschieden, nämlich $x_{m+\frac{1}{2}}$ und $y_{m-\frac{1}{2}}$ (bzw. $X_{m'+\frac{1}{2}}$ und $Y_{m'-\frac{1}{2}}$). Daher ergibt die Ausführung der in (5,12) vorkommenden Summationen:

$$(5,13) \quad \begin{cases} (q) = x_{m+\frac{1}{2}} X_{m'+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int q \overline{\psi^{m+\frac{1}{2}}} \Psi^{m'+\frac{1}{2}} d\tau \\ + y_{m-\frac{1}{2}} Y_{m'-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int q \overline{\psi^{m-\frac{1}{2}}} \Psi^{m'-\frac{1}{2}} d\tau. \end{cases}$$

Für q ist der Reihe nach

$$\begin{aligned} \frac{x + iy}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \vartheta e^{i\varphi}, \\ \frac{x - iy}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} r \sin \vartheta e^{-i\varphi}, \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

einzusetzen. Die Integrale (5,13) sind, was ihre Winkelanteile betrifft, dieselben, wie sie bei der Berechnung des Rotationsspektrums zweiatomiger Moleküle auftreten¹⁾. Es gelten daher wie dort die Auswahlregeln für die Quantenzahlen m und l :

$$(5,14) \quad l' = l \pm 1, \quad m' = m \pm 1 \quad \text{oder} \quad m' = m.$$

1) Vgl. A. Sommerfeld, „Wellenmech. Ergänzungsbd.“ S. 62 ff.

Während die Übergänge $m' = m \pm 1$ zu den rechts bzw. links zirkular polarisierten σ -Komponenten des Zeemaneffekts Veranlassung geben, sind die Übergänge $m' = m$ für die linear polarisierten π -Komponenten verantwortlich.

Wir bemerken ausdrücklich, daß eine entsprechende Auswahlregel für die innere Quantenzahl j in unseren Rechnungen nicht enthalten ist. Tatsächlich ist die Bedingung

$$(5,15) \quad |j' - j| \leq 1$$

nur in sehr starken und sehr schwachen Feldern erfüllt. Die Formeln (5,13) geben daher auch Rechenschaft von den bei mittleren Feldstärken auftretenden „verbotenen Linien“, wie sie von Paschen und Back¹⁾ in der I. Nebenserie des Funkenspektrums von Calcium entsprechend einem Übergang $p_{\frac{1}{2}} \rightarrow d_{\frac{3}{2}}$ beobachtet wurden.

Zur expliziten Berechnung der Intensitäten aus den Matrixelementen (5,13) muß man die Eigenfunktionen ψ^{μ} auch in ihren Radialteilen kennen. Diese ergeben den gemeinsamen Faktor

$$F = \int_0^{\infty} R_{n,l}(r) R_{n',l'}(r) r^3 dr.$$

Da F nur von n, l und n', l' abhängt, hat es denselben Wert für zwei Linien, bei denen sich die Ausgangsniveaus ebenso wie die Endniveaus nur in j und m unterscheiden, d. h. für solche Linien, die im feldlosen Zustand nur durch Feinstruktur getrennt sind (wie z. B. alle 10 Zeemankomponenten der beiden gelben Na-Linien). Für die relative Intensität solcher Linien ist also F belanglos.

Da die Gl. (3,27) nur die Verhältnisse $x_{m+\frac{1}{2}}/y_m - \frac{1}{2}$ bzw. $X_{m'} + \frac{1}{2}/Y_{m'} - \frac{1}{2}$ festlegen, müssen wir zur Bestimmung der absoluten Größe der Koeffizienten noch die Normierung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit heranzuziehen. Setzen wir in (5,11) $\Psi = \psi$, so erhalten wir die zum Zustand ψ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$(5,16) \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \sum_{\mu} \sum_{\nu} (x_{\mu} x_{\nu} + y_{\mu} y_{\nu}) \overline{\psi^{\mu}} \psi^{\nu} \\ &= x_{m+\frac{1}{2}}^2 \overline{\psi^{m+\frac{1}{2}}} \psi^{m+\frac{1}{2}} + y_{m-\frac{1}{2}}^2 \overline{\psi^{m-\frac{1}{2}}} \psi^{m-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Da die gesamte Aufenthaltswahrscheinlichkeit für ein im Zustand ψ befindliches Elektron gleich 1 ist, so ergibt sich daraus durch räumliche Integration mit Rücksicht auf die Normierung (1,6) der Grundlösungen:

$$(5,17) \quad \int \varrho d\tau = x_{m+\frac{1}{2}}^2 + y_{m-\frac{1}{2}}^2 = 1.$$

Die Berechnung der Intensitäten geht nunmehr folgendermaßen vor sich: Zu einer gegebenen Feldstärke H sind aus (3,30) die Energiestörungen ε und ε' des Ausgangs- bzw. Endniveaus zu entnehmen [was allerdings die Kenntnis der Dublettabstände $(2l+1)Q_{n,l}$ bzw. $(2l'+1)Q_{n',l'}$ voraussetzt]. Aus (3,27) erhält man dazu die Koeffizienten $x_{m+\frac{1}{2}}$, $y_{m-\frac{1}{2}}$ und $X_{m'} + \frac{1}{2}$, $Y_{m'} - \frac{1}{2}$, die dann nach (5,17) zu normieren sind. Damit können die Matrixelemente (5,13)

1) F. Paschen u. E. Back, Physica 1921, S. 261.

berechnet werden. Das Quadrat des absoluten Betrags eines Matrixelements ist der bei dem betreffenden Übergang ausgestrahlten Energie proportional. Die dabei zu beobachteten Linienintensitäten sind dadurch in ihren Verhältnissen ebenfalls bestimmt, aber nach den Gesetzen der Dipolstrahlung je nach der Beobachtungsrichtung verschieden¹⁾.

Eine Berechnung der Intensitäten im Zeemaneffekt für beliebige magnetische Feldstärken ist bereits in der auf S. 658 erwähnten Arbeit von Sommerfeld enthalten. Zu den gleichen, entsprechend verallgemeinerten Resultaten gelangten dann unter Zuhilfenahme eines Spinmodells Heisenberg und Jordan nach quantenmechanischen, Darwin nach wellenmechanischen Methoden²⁾.

Bei schwachen Feldern liefern die Gl. (5,13) die sehr einfachen Intensitätsformeln, die Hönl³⁾ in diesem Grenzfall für beliebige Multiplizitäten abgeleitet hat. Unter „schwachen Feldern“ sind dabei solche zu verstehen, bei denen zwar schon eine Zeemanaufspaltung, aber noch keine Beeinflussung der Übergangswahrscheinlichkeiten durch das Magnetfeld wahrnehmbar ist. Wir müssen also die Koeffizienten $x_\mu \dots$ für $H = 0$ berechnen, um zu den Hönl'schen Formeln zu gelangen. Die Koeffizienten werden dabei von der Größe Q unabhängig. Die gleiche Vereinfachung ergibt sich in dem anderen Grenzfall des Paschen-Backeffekts. Er ist dadurch gekennzeichnet, daß in (3,27) Q gegen ω zu vernachlässigen ist. Auch hier gehen also die individuellen Konstanten Q der einzelnen Doublets in die Intensitätsverhältnisse nicht ein.

Zusammenfassung

Zur Berechnung der Feinstruktur und des Zeemaneffekts der Alkalien wird nach einem von Sommerfeld und Maue angegebenen Verfahren die iterierte Diracgleichung näherungsweise integriert. Die Eigenwertstörungen werden in zweiter Näherung nach der Schrödingerschen Störungstheorie ermittelt. Es ergeben sich dabei die Voigt-Sommerfeldschen Formeln die Zeemanaufspaltungen von Doubletssystemen. Mit Hilfe der Eigenfunktionen nullter Näherung werden die Auswahl- und Intensitätsregeln im Zeemaneffekt diskutiert.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. A. Sommerfeld, möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine immerwährende Unterstützung bei ihrer Durchführung meinen tiefsten Dank aussprechen, ebenso auch Herrn Dr. habil. A. W. Maue für viele aufschlußreiche Diskussionen.

1) Vgl. „Atombau und Spektrallinien“ I S. 579.

2) Vgl. die Zitate auf S. 643.

3) F. Hönl, Ztschr. f. Phys. 31. S. 340. 1925.

Höllriegelskreuth b. München, Ges. f. Lindes Eismaschinen-A.-G.

(Eingegangen 30. September 1936)

Logarithmische und lineare Lautstärkenskala**Von W. Bürck, P. Kotowski und H. Lichte**

(Mit 1 Figur)

Vor zehn Jahren hat Barkhausen¹⁾ die Lautstärkeeinheiten des Wiens und des Phons vorgeschlagen, wobei die erste Einheit einer linearen und die zweite einer logarithmischen Skala zugeordnet gewesen ist. Die Begründung der logarithmischen Skala war dabei der große Umfang der Lautstärkemaßzahlen bei linearer Skalenteilung, der durch das logarithmische Maßsystem erheblich verkleinert werden konnte. Diese zweite Einheit ist wiederholt mit der Annahme des Weber-Fechnerschen Gesetzes bzw. seiner strengen Gültigkeit in gewissen Bereichen verbunden worden²⁾, so daß heute mit den Lautstärkemaßzahlen der logarithmischen Skala von vielen Leuten unklare und verschwommene Vorstellungen über die „empfundene Lautstärke“ verbunden werden. Diese Annahme, daß die logarithmische Skala dem Ohr besonders entspreche, hat anscheinend mit dazu geführt, daß sie in letzter Zeit fast ausschließlich benutzt wird, während die von Barkhausen vorgeschlagene, dem normalen Gebrauch näherliegende lineare Skala fast vergessen ist. Auch Wien³⁾ bediente sich bei seinen grundlegenden Lautstärkemessungen einer linearen Skala. Er wählt den logarithmischen Maßstab nur, um eine graphische Darstellung zu ermöglichen, weist allerdings auch auf die Berechtigung dieser Einteilung für den Fall hin, daß das Weber-Fechnersche Gesetz Gültigkeit besitzt. *Die Lautstärkeempfindung ist aber wie jede Empfindung mit physikalischen Methoden grundsätzlich nicht meßbar, so daß man die „richtige Skalenteilung“ mit Hilfe der Empfindung nicht prüfen kann.* Mit dem Ohr messen kann man lediglich die Gleichheit zweier Lautstärken, genau wie man z. B. in der Optik mit dem Auge nur die Gleichheit zweier Helligkeiten feststellen kann, so daß man eine willkürliche Lautstärkeskala für Schallereignisse einer bestimmten Art z. B. den reinen Sinuston von 1000 Hz festsetzen muß, worauf man zu einem unbekannten Schallereignis den gleichlauten Ton der

1) H. Barkhausen, Ztschr. f. techn. Phys. 7. S. 599. 1926.

2) Vgl. z. B. R. Berger, Schalltechnik. 6. S. 17. 1933.

3) M. Wien, Phys. Ztschr. 4. S. 69. 1902.

Normalskala bestimmt und dessen willkürlich definierte „Lautstärke“ als Lautstärke des unbekannten Schallereignisses übernimmt. Da man die Skala willkürlich teilen kann, wird man zweckmäßig einfache Gesetze zur Einteilung wählen, wobei die lineare Skala die einfachste ist, die außerdem jedem, auch dem physikalisch und mathematisch Ungebildeten leicht verständlich ist. Hält man den Vorzug eines engen Zahlenbereichs der möglichen Lautstärken für wichtig genug, so kann man die logarithmische Skala wählen. Man führt damit aber etwas sogar dem Physiker Ungewohntes ein und verzichtet auf ein Verständnis der akustischen Maße durch Nichtfachleute. Insbesondere sind die gewöhnlichen Rechenoperationen der Addition und Multiplikation nicht mehr in der gebräuchlichen Art ausführbar. Es wird beispielsweise einem Nichtfachmann schwer erklärlich sein, daß die Aufstellung von zwei gleichlauten Schallquellen einer Steigerung der Lautstärke gegenüber einer Schallquelle um einen konstanten Phonbetrag unabhängig von der Absolutlautstärke gleichkommt.

Die Verhältnisse in der Akustik sind denen in der Optik weitgehend gleich. Obwohl das Auge nach Ansicht vieler Leute logarithmisch registriert, hat kein Physiker und Beleuchtungstechniker eine logarithmische Skala für Helligkeiten benutzt. Es hat sich hier vielmehr trotz des ähnlich großen Meßzahlenumfangs wie bei Schallmessungen nur die einfache lineare Skala durchgesetzt und bestens bewährt. Daneben wird noch eine logarithmische Skala für einzelne Fälle (Sterngrößen in der Astronomie, Schwärzung in der Photographie) benutzt.

Eine Skala nach der Empfindung aufzubauen, wird niemals eindeutig gelingen und ist außerdem für den praktischen Gebrauch unzweckmäßig. Will man aber die „empfundene Lautstärke“ oder die „Lautheit“ als Einteilungsgrundlage in der Akustik wählen, so ist man gezwungen, willkürliche Annahmen über den Gang der Lautheit mit der Schallintensität zu machen. Fletcher¹⁾, der diese Frage sehr eingehend bearbeitete und auch die Ergebnisse fremder Untersuchungen zusammenfaßte, kommt zu folgendem Ergebnis: Drei verschiedene Methoden führen zu annähernd derselben Lautheitskala. Erste Untersuchungsmethode mit folgender Annahme: Bei gleicher Empfindlichkeit beider Ohren ist die bei einohrigem Hören empfundene Lautstärke gleich der Hälfte der bei zweiohrigem Hören empfundenen. Zweite Untersuchungsmethode mit der Annahme: Zwei Töne, die jeder für sich die gleiche empfundene

1) H. Fletcher, Journ. Frankl. Inst. 22. S. 405. 1935.

Lautstärke hervorrufen, ergeben zusammen die doppelte Lautstärke, falls sie so gewählt werden, daß keine Verdeckungseffekte auftreten. Dritte Untersuchungsmethode: Ohne physikalische Annahme wird bei verschiedenen Ausgangslautstärken die subjektiv empfundene Lautstärkeverdoppelung registriert. Die beiden ersten Methoden lassen sich auf die gemeinsame Grundannahme zurückführen, daß die Anzahl der dem Gehirn zugeleiteten Nervenimpulse proportional dem zugeführten Schalldruck ist, und daß, zum mindesten im Bereich 1:2, die Empfindung linear von der Impulsanzahl abhängt. Die Abhängigkeit der Empfindung von der Impulszahl kann aber mit physikalischen Mitteln nicht nachgeprüft werden. Die dritte Untersuchungsmethode ist nur möglich, wenn sich die Meßpersonen, durch längere Übung befähigt, einen Empfindungsmaßstab zurechtgelegt haben, der sich jedoch jeder physikalischen Kontrolle entzieht.

Daß der Empfindungsmaßstab tatsächlich ein Geschmacksurteil darstellt, ist aus der Tatsache ersichtlich, daß z. B. ein Schallereignis *A* leiser als ein anderer Schallvorgang *B* erscheint, dieser Vorgang *B* wieder leiser als *C*, trotzdem aber in reproduzierbarer Weise von manchen Beobachtern *A* lauter als *C* empfunden werden kann¹⁾. Steudel folgert daraus, daß der Lautstärkemaßstab dieser Gruppe von Beobachtern falsch sei; nach seiner Meinung müßten diese Meßpersonen sich entweder einen anderen Lautstärkemaßstab angewöhnen, oder sie kämen für akustische Messungen als Beobachter nicht in Frage. Die Ansicht, daß ein Empfindungsmaßstab falsch sei, ist aber ebenso unberechtigt wie die, man könne einen anderen Maßstab als „richtig“ bezeichnen, da nicht einzusehen ist, warum für Empfindungen die Regeln der Algebra Gültigkeit besitzen sollen.

Man muß also irgendwelche willkürlichen Annahmen bei der Aufstellung einer Empfindungsskala machen.

Unter den Voraussetzungen, die Fletcher gemacht hat, gelangt man zu einer „Lautheitsfunktion“, die je nach der Art der Schallvorgänge etwas verschieden ausfällt, im allgemeinen aber den in der Abbildung als Kurve *a* dargestellten Verlauf hat. In der Abbildung ist gleichzeitig eine Linearteilung (Kurve *b*) und eine logarithmische Abhängigkeit (Kurve *c*) so eingetragen, daß innerhalb der dargestellten 5 Zehnerpotenzen des Reizes (Schalldruck) der größte Fehler in der Ordinatenrichtung ein Minimum wird. Dieser größte auftretende Fehler ist bei linearer Skala etwa der Faktor 3,5, bei logarithmischer Skala etwa der Faktor 20. Die Fletchersche Lautheitskurve schmiegt sich also wesentlich besser der linearen

1) U. Steudel, Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik. 41. S. 116. 1933.

als der logarithmischen Teilung an. Je größer der Bereich gewählt wird, um so fehlerhafter wird die logarithmische Teilung; in genügend kleinen Bereichen läßt sich ja jede Teilung mit der Lautheitskurve in Einklang bringen. Selbst unter der Voraussetzung also, daß man die physikalische Skala der Lautstärke nach der

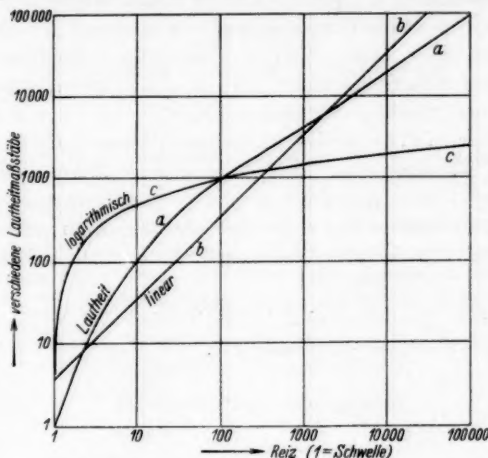


Fig. 1

Lautheit einteilen wollte, hat die Linearteilung vor der logarithmischen den Vorrang, da das Weber-Fechnersche Gesetz die empfundene Lautheit schlechter wiedergibt als die einfache Annahme eines linearen Zusammenhangs.

Die oft für die Gültigkeit des Weber-Fechnerschen Gesetzes zitierte Erscheinung, daß z. B. bei einer Reihe von gleich großen, nach Helligkeit gestuften Flächen der Helligkeitszuwachs proportional zur vorher vorhandenen Helligkeit gewählt wird, sagt nur aus, daß die Steigerung eines Sinneseindrucks nach einer geometrischen Reihe eine ästhetisch befriedigendere Wirkung auf den Durchschnittsmenschen ausübt, ihm als „gleichmäßiger“ erscheint, als eine Steigerung nach einer arithmetischen Reihe. Hieraus einen Zusammenhang mit der Empfindungsskala herzuleiten, ist willkürlich.

Die logarithmische Lautstärkeskala hat auch deswegen die lineare Skala verdrängt, weil zur Zeit Schwachstromtechnik und Akustik fast überall gemeinsam behandelt werden und die Schwachstromtechniker an logarithmische Maßstäbe von der Kabel- und Verstärkertechnik her gewöhnt sind, in der derartige Maßstäbe in vielen

Fällen zweckmäßiger sind als lineare. Dabei wird häufig übersehen, daß die in der Schwachstromtechnik üblichen logarithmischen Maße neben häufig gebrauchten linearen bestehen, so daß man sich dort die jeweils bequemere Skala aussuchen kann. In der Akustik dagegen besteht heute die Gefahr von Mißverständnissen bei Benutzung der oftmals bequemeren linearen Skala; soweit ist heute die lineare Skala bereits ungebräuchlich geworden. Es erscheint also mindestens der Gebrauch einer linearen Skala neben der logarithmischen als berechtigt, und dies um so mehr, als von den bisher vorgeschlagenen logarithmischen Skalen bereits zwei, nämlich die Skala der alten Phons und der S. U. (sensation units) nach kurzem Gebrauch nicht befriedigten. Erwägenswert scheint in diesem Zusammenhang der Vorschlag von Davis¹⁾, für alle Zweige der Physik eine neue einheitliche logarithmische Skala einzuführen, die durch besondere Beiwörter auf die verschiedenen Arbeitsgebiete bezogen werden könnte.

1) A. H. Davis, Proc. Phys. Soc. London. **46**. S. 631. 1934.

Berlin, Telefunken-Laboratorium.

(Eingegangen 14. Oktober 1936)